



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 1

Neiva, 24 de Abril del 2019

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El suscrito: Robert Augusto Rubiano Giraldo, con C.C. No. 1075282438, autor de la tesis y/o trabajo de grado o titulado Analogía entre las ecuaciones de Schrödinger, Dirac y la ecuación de Poisson en medios materiales presentado y aprobado en el año 2019 como requisito para optar al título de Físico;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE: Robert Augusto Rubiano Giraldo

Firma:

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Analogía entre las ecuaciones de Schrödinger, Dirac y la ecuación de Poisson en medio materiales

AUTOR O AUTORES: Robert Augusto Rubiano Giraldo

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Rubiano Giraldo	Robert Augusto

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
González Sierra	Hernando

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Físico

FACULTAD: Ciencias Exactas y Naturales

PROGRAMA O POSGRADO: Física

CIUDAD: Neiva

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2019

NÚMERO DE PÁGINAS: 96



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	2 de 4
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas_X__ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general_X_ Grabados___
Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___
Tablas o Cuadros_X_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>	<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. Transformaciones	Transformation	6. Cuántica	Quantum
2. Analogía	Similarity	7. Modelo	Model
3. Electrostática	Electrostatic	8. Permitividad	Permittivity
4. Magnetostática	Magnetostatic	9. Homogéneo	Homogeneous
5. Mecánica	Mechanics	10. Inhomogeneo	Non-homogeneous

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En este trabajo se amplían las transformaciones propuestas por González y Rokaj en sus investigaciones, las cuales establecen una analogía entre la ecuación de Poisson en el espacio libre y la ecuación Schrödinger. La solución de la ecuación tipo Schrödinger obtenida por González y Rokaj, se encuentra caracterizada por ser semejante a una función propia de una partícula cuántica de masa m que atraviesa un cristal iónico unidimensional.

Este Trabajo de Grado presenta un estudio extensivo de la investigación planteada por González y Rokaj, ya que modifica el medio donde se aplican las transformaciones, al ser efectuadas en la ecuación unidimensional de Poisson en medios materiales conducen bajo condiciones específicas a ecuaciones tipo Dirac y Schrödinger independientes del tiempo. Inicialmente aplicamos una transformación a la ecuación unidimensional de Poisson en



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	3 de 4
--------	--------------	---------	---	----------	------	--------	--------

materiales homogéneos, lineales, isotrópicos, dieléctricos o magnetizables, con el fin de analizar el comportamiento descrito por las funciones propias obtenidas bajo la influencia de estos medios; posteriormente usaremos otra transformación sobre la ecuación unidimensional de Poisson en materiales no-homogéneos magnetizables, y se simularán los resultados empleando el software Wolfram Mathematica 10. Asumimos de este modo que las analogías presentes entre la ecuación unidimensional de Poisson y las ecuaciones de Dirac y Schrödinger solo son posibles mediante la existencia de una combinación de potenciales de función delta atractivos y repulsivos.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

In this work the transformations proposed by González and Rokaj in their investigations are extended [1], [2] which establish a similarity between the free- space Poisson equation and the Schrödinger equation. The solution of the Schrödinger equation obtained by González and Rokaj, is characterized to be similar for a quantum particle of mass m that passes through one dimensional ionic crystal.

This Degree Project presents an extensive study of the research proposed by González and Rokaj, since it modifies the means where the transformations are applied, when they are carried out in one-dimensional Poisson equation in material means, they lead under specific conditions to time-independent Dirac and Schrödinger equations. Initially we applied a transformation to the one-dimensional Poisson equation in homogeneous, dielectric or magnetizable materials, in order to analyze the behavior described by the functions obtained under the influence of these means; then we will use other transformation on the dimensional Poisson equation magnetizable non-homogeneous materials, and the results will be simulated using Wolfram Mathematic 10 software. In this way we assume that the similarities present between the one-dimensional Poisson equation and the Dirac and Schrödinger equations are only possible through the existence of a combination of attractive and repulsive delta function potentials.



CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	4 de 4
--------	--------------	---------	---	----------	------	--------	--------

APROBACION DE LA TESIS


Nombre Presidente Jurado: Ana Lilia Bernal Esteban

Firma: 

Nombre Jurado: Diego Alejandro Rasero Causil

Firma: 

Nombre Jurado: Francis Armando Segovia Chaves

Firma: 



Universidad Surcolombiana
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Programa de Física
Sede Neiva

Analogía entre las ecuaciones de Schrödinger, Dirac
y la ecuación de Poisson en medios materiales

Robert Rubiano Giraldo

Universidad Surcolombiana
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Programa de Física
Sede Neiva

Analogía entre las ecuaciones de Schrödinger, Dirac
y la ecuación de Poisson en medios materiales

Trabajo de Grado

Requisito parcial para optar al título de Físico

Presentado por el estudiante

Robert Rubiano Giraldo

Código: 20121110459

Director

Ph.D. Hernando González Sierra

17 de Enero de 2019

Página de aceptación
Este Trabajo de Grado cumple con los requisitos exigidos por la
Universidad Surcolombiana
para otorgar el título de
FÍSICO

Director

Ph.D. Hernando González Sierra
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Surcolombiana

Jurados

M.Sc. Diego Alejandro Rasero Causil
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Surcolombiana

M.Sc. Francis Armando Segovia Chaves
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Surcolombiana

Agradecimientos

iv

Quiero agradecer en primer lugar a todos los miembros de mi familia que durante todo este tiempo me dieron su apoyo de diversas formas. A mi madre Cristina Giraldo Cardona por siempre impulsar mis estudios académicos y brindarme su comprensión. A mi padre Lunio Rubiano por prestarme en la medida de lo posible su apoyo y colaboración. A mi tía Martha Giraldo Cardona por su incondicional apoyo en mi proceso de formación. A mi novia Alejandra Quintero Gaitán por ayudarme a elaborar y diseñar algunas de las figuras de este Trabajo de Grado. A mis amigos y compañeros de estudio por siempre estar ahí. A los docentes del Programa de Física de la Universidad Surcolombiana que en mis años de estudio me llenaron de conocimiento, al docente Hernando González Sierra por su dedicación en el transcurso de la realización de este Trabajo de Grado, al profesor Francis Segovia por siempre impulsarme a ser un mejor Físico a través de sus enseñanzas. En general y finalmente, agradezco la Universidad Surcolombiana por brindar el financiamiento requerido para exponer parte de los resultados de este Trabajo de Grado en el *Ist Applied Phys. Eng. & Innovation - VI Congreso Nacional de Ingeniería Física* mediante la Vicerrectoría de Investigación y Proyección Social.

Tabla de Contenido

v

Resumen.....	1
Abstract.....	3
Introducción	4
1. Justificación y Planteamiento del Problema	9
1.1. Estado Actual y Antecedentes	10
2. Objetivos.....	15
2.1. Objetivo General.....	15
2.2. Objetivos Específicos.....	15
3. Marco Teórico.....	16
3.1. Teoría electromagnética de Maxwell en el régimen estacionario.....	16
3.1.1. Electrostática en el espacio libre.....	16
3.1.2. Electrostática en medios materiales	19
3.1.3. Magnetostática en el espacio libre	23
3.1.4. Magnetostática en la materia	25
3.1.5. Teorema de Unicidad del Potencial	29
3.2. Teoría cuántica de la materia	29
3.2.1. Deducción de la ecuación de Schrödinger	29
3.2.2. Interpretación cuántica de una partícula Relativista	31
3.2.3. Deducción de la ecuación de Dirac.....	32
3.2.4. Modelo de Jackiw-Rebbi (Energía de punto cero)	34
4. Metodología	38
4.1. FASE 1: Transformaciones de González y Rokaj	38
4.1.1. Transformación de la ecuación de Poisson en dieléctricos homogéneos	40
4.1.2. Transformación de la ecuación de Poisson en medios magnetizables homogéneos	43
4.2. FASE 2: Soluciones a las ecuaciones tipo Schrödinger.....	45
4.2.1. Solución a la ecuación tipo Schrödinger encontrada en 4.1.1	45
4.2.2. Solución a la ecuación tipo Schrödinger encontrada en 4.1.2	50
4.3. FASE 3: Transformación de la ecuación de Poisson en medios magnetizables no-homogéneos, no-isotrópico	54
4.4. FASE 4: Solución de ecuación tipo Dirac encontrada en 4.3	56
4.5. FASE 5: Sistematización de Resultados producto del proceso teórico	58
4.6. FASE 6: Conclusiones	59
5. Análisis y Discusión de Resultados	60
5.1. Simulación de las soluciones propias en materiales homogéneos	60
5.1.1. Medios Dieléctricos	60
5.1.2. Medios Magnetizables	65
5.2. Simulación de la solución propia en medios magnetizables no-homogéneos	69
6. Conclusiones	72
7. Apéndices.....	74
Referencias.....	86

Lista de Tablas

vi

Tabla 1. Constantes Dieléctricas.....	63
---------------------------------------	----

Lista de Figuras

vii

Figura 1. Gráfica tomada de la investigación dirigida por González [1], muestra las gráficas establecidas por la función de onda (I) para: (a) N=1, (b) N=2, (c) N=3, (d) N=4.	12
Figura 2. Las componentes normales del campo electrostático a cada lado de una interface dependen de la densidad superficial de carga eléctrica.	18
Figura 3. Geometría de las condiciones de frontera en un material dieléctrico lineal.	22
Figura 4. Geometría de las condiciones de frontera magnetostáticas en un medio lineal.	28
Figura 5. Muestra el potencial escalar externo $\phi(x)$ que cambia el signo en la interfaz $x=0$	35
Figura 6. Modo de energía cero Jackiw-Rebbi dado por la ecuación (52.2) para el campo escalar externo representado en la figura 5 ; el estado se localiza alrededor de $x=0$	37
Figura 7. Configuración de placas paralelas conductoras infinitas, espaciadas una distancia a con un dieléctrico lineal, homogéneo, isotrópico entre ellas.	45
Figura 8. Configuración de placas paralelas infinitas, espaciadas una distancia a que transportan una corriente superficial cada una.	50
Figura 9. Comportamiento del material lineal, homogéneo, isotrópico, magnetizable entre las placas influenciado por la configuración de campos magnetostáticos en la Figura 8, producto de las corrientes superficiales.	50
Figura 10. Configuración magnetostático con una corriente superficial $K = \mp kz$ [53], [54]. El material lineal, homogéneo, isotrópico, magnetizable entre las placas se comporta de forma similar a lo descrito en la figura 9.	55
Figura 11. La función propia (91) para distintos valores de N: (a) N=1, (b) N=2, (c) N=3, (d) N=4 en función de z	61
Figura 12. Gráficas de la función de propia (91) en una sola representación para $\epsilon_r = 1.000548$ con diferentes valores de N.	62
Figura 13. Configuraciones de las funciones propias (91) para los diferentes materiales presentes en la tabla 1 en función de z , con N=4.	63
Figura 14. La función de propia (91) para distintos valores de N: (e) N=1, (f) N=2, (g) N=3, (h) N=4 en función de z , cuando la permitividad eléctrica relativa es igual a la del espacio libre $\epsilon_r \approx 1$	65
Figura 15. La función de propia (105) para el Gd con distintos valores de N: (i) N=1, (j) N=2, (k) N=3, (l) N=4 en función de z	66
Figura 16. Gráficas de la función de propia (105) en una sola representación para el Gd con los diferentes valores de N.	67
Figura 17. La función solución propia (105) para diferentes valores de N, con $\mu_r=0.99983$	68
Figura 18. Muestra la función de propia (105) para valores arbitrarios $\mu_r \geq 1$ en función de z , con N=4.	69
Figura 19. La función solución propia (121) para un medio no-homogéneo unidimensional con constantes $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = 2$ [57].	70
Figura 20. La función solución propia (121) para un medio no-homogéneo unidimensional con constantes $\mu_1 = 983$ y $\mu_2 = 1043$ [58].	70
Figura 21. Campo eléctrico debido a una placa infinita con densidad de carga superficial.	74
Figura 22. Placa infinita con una densidad de corriente superficial.	78
Figura 23. Par simétrico de filamentos de corriente con corriente a lo largo de e_x	79
Figura 24. Vista lateral de la figura 22.	79

Resumen

En este trabajo se amplían las transformaciones propuestas por González y Rokaj en sus investigaciones [1], [2] las cuales establecen una analogía entre la ecuación de Poisson en el espacio libre y la ecuación Schrödinger. La solución de la ecuación tipo Schrödinger obtenida por González y Rokaj, se encuentra caracterizada por ser semejante a una función propia de una partícula cuántica de masa m que atraviesa un cristal iónico unidimensional.

Este Trabajo de Grado presenta un estudio extensivo de la investigación planteada por González y Rokaj, ya que modifica el medio donde se aplican las transformaciones, al ser efectuadas en la ecuación unidimensional de Poisson en medios materiales conducen bajo condiciones específicas a ecuaciones tipo Dirac y Schrödinger independientes del tiempo. Inicialmente aplicamos una transformación a la ecuación unidimensional de Poisson en materiales homogéneos, lineales, isotrópicos, dieléctricos o magnetizables, con el fin de analizar el comportamiento descrito por las funciones propias obtenidas bajo la influencia de estos medios; posteriormente usaremos otra transformación sobre la ecuación unidimensional de Poisson en materiales no-homogéneos magnetizables, y se simularán los resultados empleando el software Wolfram Mathematica 10. Asumimos de este modo que las analogías presentes entre la ecuación unidimensional de Poisson y las ecuaciones de Dirac y Schrödinger solo son posibles mediante la existencia de una combinación de potenciales de función delta atractivos y repulsivos.

El estudio extensivo es puesto a prueba mediante el uso de distintas constantes de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética en las simulaciones. Comparando de este modo el comportamiento descrito por las funciones propias obtenidas a partir del estudio extensivo, para el caso del espacio libre, con las descritas por González y Rokaj; para casos distintos en nuestro análisis tomamos rangos de valores de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética para los cuales todavía se obtiene un símil cuántico. En caso de medios no-homogéneos, implementamos el estado propio de energía cero en el modelo de Jackiw-Rebbi en una configuración magnetostática unidimensional sencilla, mediante el

uso de un determinado rango de permeabilidades magnéticas, y una placa infinita con una densidad de corriente superficial.

Palabras clave: Transformaciones, Analogías, Teoría Electrostática, Teoría Magnetostática, Mecánica Cuántica.

Abstract

In this work the transformations proposed by González and Rokaj in their investigations are extended [1], [2] which establish a similarity between the free- space Poisson equation and the Schrödinger equation. The solution of the Schrödinger equation obtained by González and Rokaj, it is characterized to be similar for a quantum particle of mass m that passes through one dimensional ionic crystal.

This Degree Project presents an extensive study of the research proposed by González and Rokaj, since it modifies the means where the transformations are applied, when they are carried out in one-dimensional Poisson equation in material means, they lead under specific conditions to time-independent Dirac and Schrödinger equations. Initially we applied a transformation to the one-dimensional Poisson equation in homogeneous, dielectric or magnetizable materials, in order to analyze the behavior described by the functions obtained under the influence of these means; then we will use other transformation on the dimensional Poisson equation magnetizable non-homogeneous materials, and the results will be simulated using Wolfram Mathematic 10 software. In this way we assume that the similarities present between the one-dimensional Poisson equation and the Dirac and Schrödinger equations are only possible through the existence of a combination of attractive and repulsive delta function potentials.

The extensive study is tested by using different constant electric permittivity and magnetic permeability in the simulations. Comparing in this way the behavior described by the own functions obtained from the extensive study, in the case of free space, with those described by Gonzalez and Rokaj; for different cases in our analysis we took ranges of values of electric permittivity and magnetic permeability for which a quantum simile is still obtained. In case of non-homogeneous means, we implemented the zero-energy state of the Jackiw-Rebbi model in a simple one-dimensional magnetostatic configuration, by using a specific range of magnetic permeabilities, and an infinite plate with a surface current density.

Key words: Transformation, similarity, electrostatic theory, magnetostatic theory, quantum mechanics.

Introducción

En el presente Trabajo de Grado se quieren emplear las transformaciones de González [1] y Rokaj [2] para establecer una nueva relación entre la teoría electromagnética y la mecánica cuántica, específicamente entre la ecuación de Poisson en medios materiales lineales, homogéneos, isotrópicos y la ecuación de Schrödinger, e igualmente analizar las posibles similitudes que se encuentren entre la función de energía potencial producto de la configuración de campos electrostáticos o magnetostáticos en la materia y los diferentes fenómenos cuánticos. Adicionalmente, se planea encontrar una similitud entre la ecuación unidimensional de Poisson en medios materiales no-homogéneos y la ecuación unidimensional de Dirac para el estado de energía cero, lo cual establecería una relación con el modelo de Jackiw-Rebbi [3] en una dimensión para este mismo estado, como se verá a continuación en el desarrollo de este trabajo.

En la última década se ha aumentado el número de investigadores que indagan el cómo lograr nuevas formas de transición entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica, con analogías matemáticas encontradas entre la teoría electromagnética y la mecánica cuántica se han desarrollado casos particulares dentro del marco clásico que, bajo ciertas condiciones, adquieren una similitud, relación, con diferentes fenómenos cuánticos; estos estudios proporcionan una forma de explorar a nivel macroscópico muchos fenómenos cuánticos que actualmente son inaccesibles en sistemas cuánticos macroscópicos. En este punto el uso de transformaciones que conduzcan a una relación entre ambas teorías es una propuesta muy atractiva, siempre y cuando las transformaciones se realicen dentro de un marco específico, establecido por las condiciones que se deben satisfacer en la ecuación donde se aplique la transformación; como por ejemplo las condiciones de contorno, entre otras.

Consideremos la ecuación de Poisson en medios materiales, la cual es una de las ecuaciones más importantes de la teoría electromagnética. Esta ecuación vincula fundamentalmente la distribución volumétrica de la carga eléctrica y el potencial electrostático; permitiendo

encontrar el campo electrostático si es conocida la distribución de carga eléctrica. Si se idealiza el comportamiento de los materiales con constantes dieléctricas o permeabilidades magnéticas lineales, los cálculos necesarios para determinar un campo eléctrico o magnético en un material se simplifican; puesto que en materiales con constantes dieléctricas no-homogéneas, es decir dependientes de la trayectoria, se producirían relaciones más complejas. Dicho de otra manera, al emplear una transformación sobre la ecuación de Poisson en medios materiales con constantes dieléctricas o permeabilidades magnéticas lineales, o en medios no-homogéneos magnetizables, se deberían obtener relaciones igualmente importantes entre la teoría electromagnética y la mecánica cuántica, en relación con [1], [2].

En cualquier caso, para lograr una mayor comprensión de la física que subyace en la transición de la teoría electromagnética a la mecánica cuántica, se deben analizar los posibles casos bajo los cuales se logra este proceso; empezando por las reglas de cuantización establecidas por Bohr en 1913 [4], las cuales no son universales en su aplicación porque no logran explicar todos los sucesos relacionados con el espectro de estructura fina, más tarde explicado gracias al modelo atómico de Sommerfeld en 1916 [5]. Donde es posible rescatar un aporte fundamental, el cual indica que los electrones al girar en las orbitas no emiten radiación electromagnética, sino que únicamente lo hacen cuando cambian de nivel; siendo su energía emitida proporcional a la constante de Planck. De esta forma empezamos a ver levemente la influencia de la teoría electromagnética en la descripción atómica de la materia, pero no es hasta varias correcciones posteriores que se le dará un protagonismo. En 1924 De Broglie introduciría una teoría fundamental [6] para explicar el comportamiento de la materia, la hipótesis de la existencia de ondas materiales, es decir toda la materia tendría una onda asociada a ella; es necesario recalcar que esta idea nace de una analogía basada en el efecto fotoeléctrico de Einstein [7]. Así mismo, Schrödinger establecería en 1926, gracias a los descubrimientos anteriores, que los electrones se comportan como una onda estacionaria de materia cuya amplitud decae rápidamente al sobrepasar el radio atómico; de este modo formularía una ecuación ondulatoria que describiría la evolución en el tiempo y en el espacio de dicha onda de

materia [8]. Sin embargo, el modelo de Schrödinger no brindaba explicación sobre el espín de los electrones, no fue sino hasta que E. W. Pauli enunciara su principio de exclusión en 1925, el cual estipula que no puede haber dos fermiones con todos sus números cuánticos idénticos dentro del mismo estado cuántico, que se formularía una corrección a la ecuación ondulatoria de Schrödinger en 1927 [9]; siendo una ecuación formulada en el límite no relativista.

En la historia de la transición entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica, se resaltar que muchos fenómenos se explican a través de analogías y similitudes entre diferentes descubrimientos casi simultáneos de la época en cuestión. Hecha esta salvedad, y volviendo al tema que nos ocupa haría su aparición el físico Max Born, quien propondría una interpretación probabilística [10] de la función de onda de Schrödinger, según la cual el cuadrado de la amplitud de dicha función es igual a la densidad de probabilidad del estado; hecho que terminaría reemplazando a la densidad de carga eléctrica en la teoría electromagnética. Esta suposición sentaría las bases para que Werner Heisenberg formulara [11] su principio de incertidumbre en 1925, indicando que entre mayor certeza se busque para determinar la posición de una partícula, menos se conocerá su momento lineal y, por tanto, su masa y velocidad. Fundamentados en estas nuevas interpretaciones de la materia Werner Heisenberg, Max Born y Pascual Jordan [12] elaboraron la mecánica cuántica matricial [13], siendo equivalente a la mecánica cuántica ondulatoria planteada por Schrödinger. En consecuencia, se empieza a dilucidar que las formulaciones de la mecánica clásica Lagrangiana y Hamiltoniana tendrían analogías (contrapartes) cuánticas; siendo la analogía encontrada por Paul Dirac entre la no conmutatividad de la ecuación de Max Born y la no conmutatividad de los corchetes de Poisson, la que establecería una relación entre ambas teorías mediante el uso de los conmutadores y la notación bra-ket [14], introducida por el mismo Dirac dentro de la mecánica cuántica, lo anterior no implica que la mecánica cuántica se pueda derivar de la mecánica clásica dado que existen parámetros físicos que aún no tienen contra parte clásica, como es el caso del espín del electrón; por el contrario, indica que se puede derivar la mecánica clásica a partir de la mecánica cuántica.

Dirac formula en 1928 su versión relativista de la ecuación de onda de Schrödinger [15], donde además describe el comportamiento de partículas con espín semientero (electrones entre otros) y establece que el electrón tiene un momento magnético. Por otra parte, la mecánica cuántica guardaría una relación más con la mecánica clásica, esta vez con las leyes de Newton. En 1927 Paul Ehrenfest se preguntaba si existía algún análogo cuántico de la segunda ley de Newton, introduciendo su llamado teorema de Ehrenfest [16] explicaría como varia el valor medio del momento con respecto al tiempo, relacionándolo con el conmutador del Hamiltoniano del sistema y el operador momento; haciendo posible obtener un análogo mecano-cuántico cuando el observable (momento) no depende explícitamente del tiempo. Una forma más general del teorema de Ehrenfest se presenta a través de la ecuación de movimiento de Heisenberg [17].

Todo lo tratado hasta este punto hace parte de las teorías desarrolladas para explicar la denominada teoría electrónica de la materia, pero lo cierto es que aún falta algo, queda el problema de la interacción entre la luz y la materia. Dicho de otra manera, la teoría electromagnética de Maxwell tendría que ser modificada de acuerdo a los nuevos principios de la mecánica cuántica. De modo que una nueva teoría cuántica de la interacción de la luz y la materia, denominada como electrodinámica cuántica (QED), se desarrollaría por numerosos físicos en 1929, entre los más destacados Shin'ichirō Tomonaga, Julian Schwinger y Richard Feynman [18]. Uno de los logros más destacados de la QED, además de contar con una precisión de hasta veinte cifras significativas en diferentes predicciones experimentales, haciéndola una de las teorías más precisas de mecánica cuántica creadas en el siglo XX, es explicar por primera vez, que por efectos de la energía del punto cero (del vacío cuántico) los electrones en un estado cuántico excitado decaen hacia un nivel inferior, si existe alguno libre, desocupado.

En particular, en el presente trabajo, usando una transformación simple, se presenta una analogía entre un problema electrostático, magnetostático (de forma unidimensional) descrito por la ecuación de Poisson en la materia y la ecuación de Schrödinger. Esta nueva relación permite encontrar la función propia y los valores propios de energía del estado

fundamental del sistema cuántico descrito, mediante el uso de resultados electrostáticos y magnetostáticos en cada caso. De igual forma, se presenta una similitud entre la ecuación de Poisson en medios no-homogéneos y la ecuación unidimensional de Dirac con un potencial escalar de Lorentz para energía de punto cero. La organización metodológica de este Trabajo de Grado es la siguiente; en primer lugar, empezaremos por dilucidar el método establecido por Gabriel González y Rokaj para obtener las transformaciones a emplear, debido a que en la presente investigación mostraremos un estudio extensivo de sus trabajos [1] y [2], posteriormente procederemos a transformar la ecuación de Poisson en dieléctricos lineales, y en medios magnetizables lineales, en una ecuación similar a la de Schrödinger para cada caso; donde además se discutirá cuándo ambas ecuaciones son equivalentes. En segundo lugar, se aplicarán los resultados electrostáticos y magnetostáticos para resolver la ecuación tipo Schrödinger obtenida, en el caso de una función potencial dada por una combinación de funciones delta atractivas y repulsivas, para cada configuración. En tercer lugar, transformaremos la ecuación de Poisson en medios magnetizables no-homogéneos en una ecuación tipo Dirac, para posteriormente solucionarla. En cuarto lugar, se realiza un análisis comparativo de los resultados obtenidos para cada caso, con los diferentes fenómenos cuánticos de la actualidad. Finalmente se resumen las posibles aplicaciones que puedan tener las analogías encontradas y se hace un estudio de la física subyacente entre estos símiles.

1. Justificación y Planteamiento del Problema

El procedimiento que implica la transición de la mecánica clásica a la mecánica cuántica es uno de los logros más importantes de la física teórica, ocasionada por la necesidad de dar explicación a las inconsistencias encontradas cuando se intentan explicar fenómenos asociados al movimiento de las partículas subatómicas, pongamos por caso, el spin del electrón. Uno de los procedimientos para hacer la transición de la mecánica clásica a la mecánica cuántica son las reglas de cuantización desarrolladas por Bohr [4], y posteriormente corregidas por Schrödinger [8], Heisenberg [11], Born [10], y Dirac [15]. Otra forma de desarrollar una transición de la Mecánica Clásica a la Mecánica Cuántica es por la vía de los corchetes de Poisson [19] y del teorema de Ehrenfest [16], que proporcionan la representación de Heisenberg [17], la cual es equivalente a la Mecánica ondulatoria de Schrödinger.

En los últimos años se han reportado investigaciones referentes a transformaciones en las ecuaciones de la Mecánica Clásica que muestran conexiones con otras ecuaciones de la Física contemporánea; como por ejemplo la transformación propuesta por Gabriel González en su artículo “Relation between Poisson and Schrödinger equation”, donde transforman la ecuación de Poisson en el espacio libre en una ecuación tipo Schrödinger independiente del tiempo; sin embargo, se debe mencionar que los resultados mostrados en el anterior trabajo siguen siendo cuestionados debido a errores en el procedimiento [2], [20].

Las transformaciones implementadas para convertir ecuaciones de teoría electromagnética en ecuaciones con una semejanza matemática en mecánica cuántica, se basan mayormente en analogías entre estas teorías debido a las propiedades ondulatorias presentes en la materia y en los campos electromagnéticos en el espacio libre. A su vez, algunas de estas transformaciones podrían ser utilizadas para estudiar posibles analogías entre estas teorías en medios materiales, como dieléctricos o materiales magnéticos, ya que hasta ahora no se ha indagado en este aspecto. Por consiguiente, es imperante realizar un estudio extensivo de los medios donde se pueden emplear este tipo de transformaciones, e investigar otras

vías de conexión entre la Mecánica Clásica y las nuevas teorías contemporáneas de la Física debido a que los procedimientos de cuantización introducidos a principios del siglo anterior no son universales en su aplicación.

De esta manera se hace referencia a que el impacto logrado por este tipo de investigaciones, recae únicamente, sobre la comunidad científica que pertenece al área de física, no obstante; podría involucrarse en un ámbito pedagógico ya que posee argumentos que facilitan la comprensión de la transición entre dichas teorías. Por otra parte, con el desarrollo de esta propuesta se espera describir y comprender la física subyacente en la transición entre la Teoría Electroestática y las teorías de Física contemporánea mediante el estudio de analogías.

El presente trabajo pretende responder la pregunta (hipótesis):

¿Es posible realizar una transformación sobre la ecuación de Poisson en medios materiales que conduzca a una ecuación tipo Dirac o Schrödinger?

1.1. Estado Actual y Antecedentes

La transición entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica conduce a una cantidad de aplicaciones muy amplia y variada, desde microscopios electrónicos hasta nuevas propiedades de los elementos químicos. De esta manera, si nos centráramos solo en las aplicaciones que pudieran obtenerse por medio del estudio de la transición entre la teoría electromagnética y la mecánica cuántica, se vislumbrarían relaciones importantes no solo en el ámbito aplicativo, sino que también teórico. Por tal motivo, solo nos centraremos en un estudio detallado de los trabajos publicados hasta la fecha que se limitan a investigar la analogía entre la teoría electromagnética y la mecánica cuántica por diversos métodos.

Para empezar, las recientes transformaciones propuestas que muestran una conexión entre la teoría electromagnética y la física contemporánea se deben a las numerosas analogías

encontradas por diversos trabajos científicos [21], [22], [23], [24], [25], [26]; sin embargo, hasta el momento no ha sido posible encontrar un análogo clásico del espín debido, entre otras razones, porque éste no se encuentra definido en coordenadas espaciales; por ende, algunos intentos de interpretar el espín de las partículas de manera clásica [27] son poco creíbles, además su demostración experimental aun no satisface los requerimientos teóricos. Hecha esta salvedad, son de vital interés las transformaciones propuestas por Gabriel González [1] y Rokaj [2] debido a que en la presente investigación se plantea un estudio extensivo, empleando estas transformaciones en medios materiales homogéneos, lineales, isotrópicos y no-homogéneos a través de la ecuación de Poisson. Es decir, se planea ampliar el alcance obtenido por la investigación de González, la cual arroja los resultados de la [figura 1](#) al simular la función propia (I) establecida en su trabajo [1] para una configuración de campos electrostáticos uniformes en el espacio libre:

$$\psi(z) = \frac{\prod_{n=-N}^N \exp \left[-\frac{\alpha m (-1)^{n+N}}{\hbar^2} |z - na| \right]}{\sqrt{\frac{\hbar^2}{m \alpha} \exp \left[-\frac{\alpha m Na}{\hbar^2} \right] + \frac{2\hbar^2}{m \alpha} \exp \left[-\frac{(1+2N) \alpha ma}{\hbar^2} \right] \left[\frac{1 - (-1)^N}{2} \right] \sinh \left[\frac{m \alpha a}{\hbar^2} \right]}} \quad (I)$$

Donde $\psi(z)$ es una solución a la ecuación tipo Schrödinger, ecuación que es obtenida mediante una analogía entre la electrostática y la mecánica cuántica; en la cual n (límite inferior) y N (límite superior) indican el número de placas conductoras que se colocan paralelamente entre sí, siendo a la separación entre estas, las demás constantes como lo son: la masa m , la constante de Dirac \hbar , y $\alpha = \sigma V_0 / 2$ (σ densidad de carga superficial, V_0 un potencial constante) son producto de una analogía con la función de onda propia de un cristal iónico unidimensional. El error en esta solución radica en su término $\left[\frac{1 - (-1)^N}{2} \right]$, el cual es obtenido mediante un proceso matemático erróneo como lo afirman sus propios autores posteriormente.

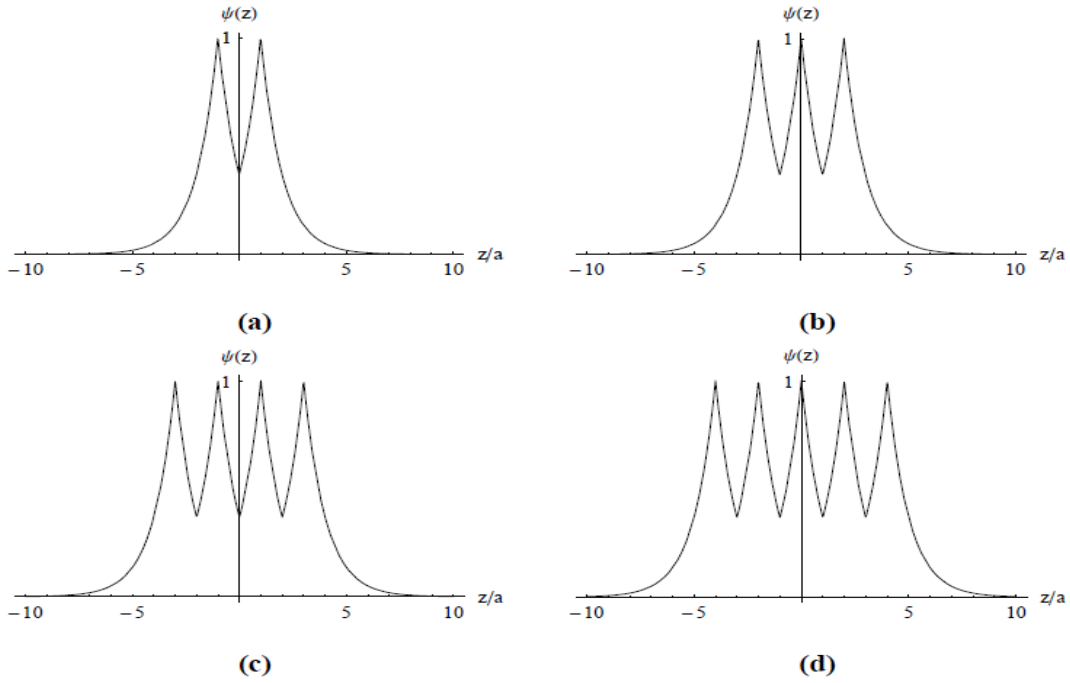


Figura 1. Gráfica tomada de la investigación dirigida por González [1], muestra las gráficas establecidas por la función propia (I) para: (a) $N=1$, (b) $N=2$, (c) $N=3$, (d) $N=4$.

Donde según González el parámetro $\alpha = \frac{\sigma V_0}{2}$ se interpreta como la intensidad del potencial, empleando unidades atómicas $\hbar = m = 1$ y $\alpha a = 1$ para obtener la figura 1. El termino constante dentro de la raíz en (I) fue posteriormente corregido por Rokaj y González en [2]; exponiendo sin mucha rigurosidad que de manera similar a [1] mediante una transformación sencilla, y empleando una configuración de campos magnetostáticos uniformes en el espacio libre, se obtendría la misma función propia (I) con la corrección (II); en este caso los autores no relacionan gráficas. En cuanto a las transformaciones mencionadas, estas serán mostradas y explicadas en detalle en la [sección 4.1](#) de la metodología.

$$A^{-1} = \sqrt{l \exp\left[\frac{-2Na}{l}\right] + 2Nl \exp\left[\frac{-(1+2N)a}{l}\right] \sinh\left(\frac{a}{l}\right)} \quad (\text{II})$$

Siendo A la constante de normalización para la ecuación (I), y l una distancia arbitraria producto de la dimensionalidad de las constantes anteriores, resultando la siguiente función propia (III) de Rokaj y González para una configuración de campos magnetostáticos en el espacio libre:

$$\psi(z) = \frac{\prod_{n=-N}^N \exp\left[-\frac{(-1)^{n+N}}{l} |z - na|\right]}{\sqrt{l \exp\left[\frac{-2Na}{l}\right] + 2Nl \exp\left[\frac{-(1+2N)a}{l}\right] \sinh\left(\frac{a}{l}\right)}} \quad (\text{III})$$

Por otra parte, el aumento en el número de estudios que abordan el problema de simulación de la mecánica cuántica relativista haciendo uso de diferentes plataformas físicas como estructuras ópticas [28], metamateriales [29], y trampas iónicas [30]; se basan en analogías matemáticas encontradas entre las diferentes teorías físicas, que proporcionan una forma de explorar a nivel macroscópico muchos fenómenos cuánticos que actualmente son inaccesibles en sistemas microscópicos. En el estudio de las analogías cuánticas-clásicas investigadas hasta ahora, parece que las más fructífera están dadas por la analogía entre la óptica y los fenómenos cuánticos debido a la dualidad entre la materia y las ondas ópticas. El estudio de las analogías ópticas cuánticas se basa en la similitud formal entre la ecuación de onda paraxial en medios dieléctricos y la ecuación de Schrödinger para una única partícula [31]. Entre la amplia variedad de analogías ópticas cuánticas podemos mencionar las oscilaciones de Bloch, la tunelización Zener, la dinámica de localización, la localización de Anderson, el efecto cuántico de Zeno, la caída de Rabi y la captura coherente de la población. En consecuencia, este progreso ha llevado a investigar cómo los sistemas relativistas pueden ser imitados por ondas ópticas u ondas referentes a potenciales.

La ecuación de Dirac es una de las ecuaciones fundamentales en la física teórica y explica completamente la mecánica cuántica para partículas elementales de espín 1/2 [15] en el contexto de la Teoría Especial de la Relatividad, además desempeña un papel clave en la explicación de muchos fenómenos físicos exóticos como las propiedades del grafeno [32], aislantes topológicos [33] y superconductores [34]. Dicha ecuación fue formulada por el físico Dirac para excluir los valores negativos de la energía y de la probabilidad implícitos

en la ecuación de Klein-Gordon [35], aunque para sorpresa Dirac terminó por descubrir la existencia de partículas asociadas a la energía negativa, llamadas posteriormente antipartículas. Más recientemente, los sistemas ópticos gobernados por la ecuación de Dirac han sido investigados experimentalmente como la Klein Tunneling [36], Zitterbewegung [37] y el modelo Jackiw-Rebbi [3]. Para terminar, y eventualmente con lo dicho hasta aquí se debe esclarecer que otro de los propósitos del presente trabajo, es demostrar que la magnetostática puede proporcionar una herramienta de laboratorio donde se puedan explorar los fenómenos físicos descritos por la ecuación de Dirac; en particular demostraremos que la ecuación de Poisson en medios unidimensionales no-homogéneos se puede mapear en el estado propio de energía cero de la ecuación unidimensional estacionaria de Dirac con un potencial escalar de Lorentz (revisar sección 3.2.4). Al adoptar la permeabilidad magnética, proponemos un experimento magnetostático que simula un modelo relativista históricamente importante conocido como el modelo de Jackiw-Rebbi [3]; desde su derivación otros modelos posteriores al de Jackiw-Rebbi son el modelo de Ramajara-Bell [38], el modelo masivo de Jackiw-Rebbi [39], el modelo acoplado fermión-kink [40], y el modelo Jackiw-Rebbi en distintos fondos kinklik [41].

2. Objetivos

2.1. Objetivo General

Encontrar una transformación que convierta la ecuación de Poisson en medios materiales homogéneos, lineales, isotrópicos en una ecuación tipo Schrödinger, o en medios materiales no-homogéneos a una ecuación tipo Dirac, con soluciones que permitan un símil cuántico.

2.2. Objetivos Específicos

- Determinar una transformación que bajo ciertas condiciones convierta la ecuación de Poisson en materiales homogéneos, lineales, isotrópicos, dieléctricos o magnetizables, en una ecuación tipo Schrödinger.
- Definir una función solución a la ecuación tipo Schrödinger encontrada en cada medio material por medio de una configuración de campos electrostáticos o magnetostáticos uniformes.
- Utilizar una transformación que convierta la ecuación unidimensional de Poisson en materiales no-homogéneos magnetizables en una ecuación tipo Dirac.
- Establecer una solución a la ecuación tipo Dirac encontrada a través de una configuración de campos magnetostáticos uniformes en la materia.
- Encontrar aplicaciones de las transformaciones obtenidas para sistemas físicos reales.

3. Marco Teórico

3.1. Teoría electromagnética de Maxwell en el régimen estacionario

En esta sección se presenta los fundamentos teóricos que conducen a la ecuación de Poisson en el espacio libre y en medios materiales (homogéneos y no-homogéneos), empleando el sistema internacional de medida M.K.S. [42], [43], [44], a excepción de en las secciones 3.2.3. y 3.2.4. donde se asumen unidades $\hbar = c = 1$ por comodidad en algunos casos.

3.1.1. Electroestática en el espacio libre

La teoría electrostática en el espacio libre, es el estudio de los campos electrostáticos producidos por cargas eléctricas que se encuentran estáticas, invariantes en el tiempo, en un medio homogéneo e isotrópico con una permitividad eléctrica igual a $\epsilon_0 = 8.8541878176 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ [42]. Siendo este un medio donde se producen interacciones entre cargas eléctricas mediante sus campos electrostáticos. Algunas de las ecuaciones fundamentales de la electrostática en el espacio libre son:

- **Ley de Gauss**

En el espacio libre se establece que el flujo eléctrico a través de una superficie es proporcional a la magnitud de las fuentes (ρ_f densidad volumétrica de carga libre). En forma puntual la ley de Gauss en el espacio libre se expresa mediante

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} \quad (1) \quad \vec{E}(\vec{r}) \text{ Campo electrostático}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \quad (1.1) \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq'$$

Donde \vec{r}' es la distancia del origen a las fuentes de campo electrostático q' y \vec{r} es la distancia del origen al punto de referencia. Siendo (1.1) la relación que proporciona información

sobre la dirección en la cual varía el campo electrostático, y que además determina que el potencial escalar es una superficie constante perpendicular a las líneas de campo electrostático.

- **Ecuación de Poisson**

De la forma diferencial de la ley de Gauss (1) y asumiendo que el campo electrostático está relacionado con el gradiente de un potencial escalar (1.1), se deriva la relación entre la densidad de carga libre y potencial escalar:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_f}{\epsilon_0} \quad (2)$$

$\phi(r)$ Potencial escalar electrostático,

Una solución a la ecuación de Poisson se da mediante la siguiente integral, la cual admite configuración de carga sencillas:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \int \frac{\rho_f(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

En ausencia de cargas libres $\rho_f = 0$ la ecuación de Poisson se reduce a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0$$

- **Discontinuidad del campo electrostático**

Al examinar las condiciones de frontera de Dirichlet o Neumann a través de la siguiente consideración:

Se considera una superficie cerrada o abierta con densidad de carga superficial σ_f , con un vector unitario normal a dicha superficie. Donde las componentes normales de los campos son \vec{E}_{2n} y \vec{E}_{1n} a cada lado de la superficie. De modo que aplicando la ley de Gauss en forma integral y tomando una pequeña caja cilíndrica de altura despreciable, para que la única contribución venga de las bases del cilindro, se pueden obtener las condiciones de frontera de las componentes normales a la superficie:

$$(\vec{E}_{2n} - \vec{E}_{1n}) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} \quad (3)$$

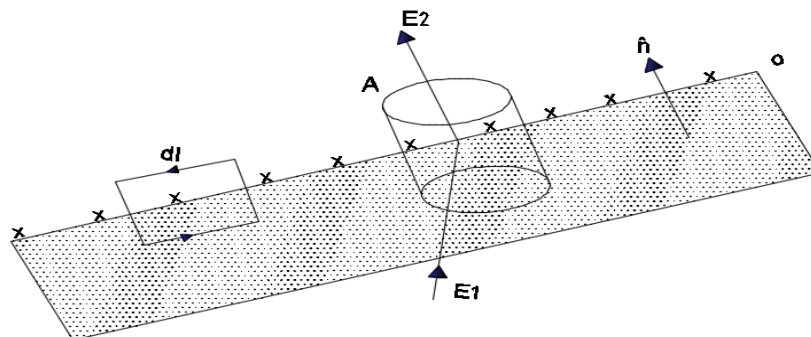


Figura 2. Las componentes normales del campo electrostático a cada lado de una interface dependen de la densidad superficial de carga eléctrica.

De manera semejante, si se toma esta vez una pequeña trayectoria cerrada en la que los lados perpendiculares a la superficie de carga sean infinitesimalmente pequeños. Haciendo uso de $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ (debido a que el campo eléctrico es estático), se demuestra que la componente tangencial de \vec{E} es continua a través de la superficie:

$$(\vec{E}_{1\tau} - \vec{E}_{2\tau}) \times \hat{n} = 0$$

- **Energía presente en el campo electrostático**

La energía electrostática concentrada en un volumen dv cerca de una distribución de cargas electrostáticas continuas ($q \rightarrow dq$) se encuentra relacionada con la carga volumétrica en una región del espacio ($dq = \rho dv$), y con el campo electrostático por la ecuación (1). A causa de esto, los campos electrostáticos almacenan energía en un volumen de espacio determinado:

$$w^e = \frac{1}{2} \int \rho_f \phi(\vec{r}) dv$$

La integral se realiza sobre el volumen de la distribución, pero puede extenderse para cubrir todo el espacio (pues $\rho_f = 0$ donde no hay carga). De acuerdo con esta ecuación la energía potencial de una distribución reside en las cargas (es cero donde $\rho_f = 0$). Un desarrollo

adicional permite, como alternativa, proponer que la energía reside en el campo electrostático:

$$w^e = \frac{\epsilon_0}{2} \int \phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int \phi(\vec{r}) \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 \, dv$$

Extendida la integral sobre todo el espacio y para distribuciones localizadas: $\vec{E} \sim 1/r^2$, $\phi(\vec{r}) \sim 1/r$, $d\vec{S} \sim 1/r^2$ tal que $\phi(\vec{r}) \vec{E} \cdot d\vec{S} \sim 1/r \rightarrow 0$:

$$w^e = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 \, dv \quad (4)$$

Esta representación permite definir la densidad de energía en un campo electrostático como:

$$w_d^e = \frac{dw^e}{dv} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 \quad (5)$$

3.1.2. Electrostatica en medios materiales

La electrostática en medios materiales explica los fenómenos asociados a la interacción de los campos electrostáticos con la materia, dividiéndose en medios homogéneos y no-homogéneos. La materia homogénea lineal isotrópica es aquella que permanece invariante ante cualquier tipo de translación espacial o temporal, es decir que para un dieléctrico homogéneo su permitividad eléctrica sería constante en cualquier dirección; mientras que la materia no-homogénea anisotrópica presenta diferentes cambios respecto a la trayectoria, por ejemplo cuando un dieléctrico es no-homogéneo su permitividad eléctrica deja de ser constante y varía con la trayectoria, lo que es igual a tener una dependencia espacial [42]. De este modo, las ecuaciones de teoría electrostática se deben reescribir introduciendo un término adicional que dé cuenta de la interacción con la materia, de la siguiente forma:

- **Ley de Gauss en dieléctricos**

En un medio material debemos adicionar a la densidad de carga libre ρ_f la densidad de carga ligada ρ_b a la ecuación (1):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_t}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_f + \rho_b) \quad (6)$$

Para dieléctricos lineales, isotrópicos ρ_b es la densidad volumétrica de carga ligada y se define como menos el flujo de polarización en el medio:

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (7)$$

Se sabe que $\chi_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_e$, la susceptibilidad eléctrica no depende de la dirección:

$$P_x = \epsilon_0 \chi_e E_x, \quad P_y = \epsilon_0 \chi_e E_y, \quad P_z = \epsilon_0 \chi_e E_z$$

Siendo \vec{P} la polarización eléctrica, la cual depende de la susceptibilidad eléctrica χ_e de los diferentes materiales. En medios dieléctricos lineales, isotrópicos:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (8)$$

Remplazando la ec. (8) en la ec. (7)

$$\rho_b = -\epsilon_0 \chi_e \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad (9)$$

Con ayuda de las ecuaciones (9) y (6) se define el vector de desplazamiento eléctrico en la materia mediante:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (10)$$

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ es la permitividad eléctrica del material.

$\epsilon_r = (1 + \chi_e)$ la permitividad relativa del mismo.

En caso de un medio no-homogéneo, es decir la susceptibilidad eléctrica depende de la posición y es un tensor; en consecuencia, se modifica la interpretación del vector de polarización de la forma:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \hat{\chi} \vec{E}$$

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

En un dieléctrico que solo es lineal $P_j = \sum_i \alpha_{ij} E_i$ con $i, j = x, y, z$ de modo que:

$$P_x = \varepsilon_0(\chi_{xx}E_x + \chi_{xy}E_y + \chi_{xz}E_z)$$

$$P_y = \varepsilon_0(\chi_{yx}E_x + \chi_{yy}E_y + \chi_{yz}E_z)$$

$$P_z = \varepsilon_0(\chi_{zx}E_x + \chi_{zy}E_y + \chi_{zz}E_z)$$

Ya que χ_e y ε no dependen de la posición, la ley de Gauss para dieléctricos homogéneos, lineales, isotrópicos se puede reescribir de la forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon} \quad (6.1)$$

- **Ecuación de Poisson en dieléctricos homogéneos**

Partiendo de la ecuación (2), y agregando el término de interacción con la materia:

$$\nabla^2 \phi(r) = -\left(\frac{\rho_f + \rho_b}{\varepsilon_0}\right) \quad (11)$$

Reemplazando (9) en (11):

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{\varepsilon_0 \chi_E \nabla \cdot \vec{E} - \rho_f}{\varepsilon_0} \quad (12)$$

Teniendo en cuenta que: $-\nabla \cdot \vec{E} = \nabla^2 \phi(r)$

$$\nabla^2 \phi(r) = -\frac{\rho_f}{\varepsilon} \quad (13)$$

Siendo (13) la ecuación de Poisson para materiales dieléctricos lineales.

- **Discontinuidad del campo electrostático en dieléctricos homogéneos**

Mediante un proceso similar al realizado en la discontinuidad del campo electrostático en el espacio libre, y con la única diferencia de colocar una interfaz entre dos dieléctricos se obtienen las condiciones de frontera.

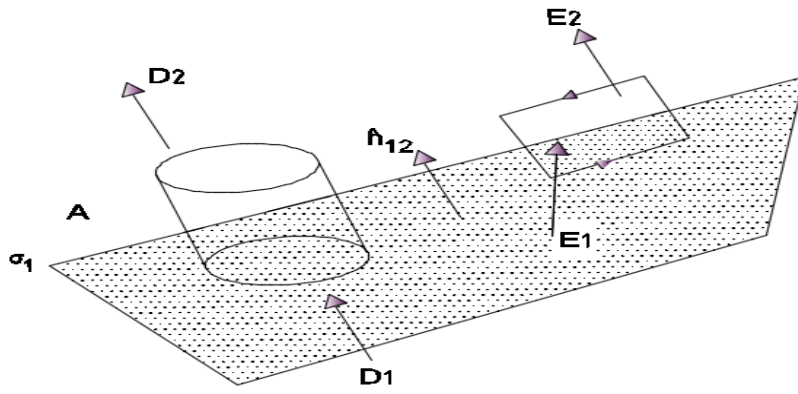


Figura 3. Geometría de las condiciones de frontera en un material dieléctrico lineal.

Para campos tangenciales en la superficie de la interfaz entre los dos medios se tiene que son continuos:

$$(\vec{E}_{1\tau} - \vec{E}_{2\tau}) \times \hat{n} = 0$$

En forma equivalente, las componentes normales del vector de desplazamiento eléctrico en la interfaz presentan una discontinuidad si hay cargas libres presentes en ella:

$$(\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n}) \cdot \hat{n} = \sigma_f \quad (14)$$

- **Energía del campo electrostático en presencia de un dieléctrico homogéneo, lineal, isotrópico**

De forma similar a como se determina la energía electrostática en el espacio libre, podemos decir que debido a la presencia del dieléctrico se debe hacer trabajo para producir polarización en este; a medida que más cargas se acercan a dq más se polariza el dieléctrico lineal, homogéneo, isotrópico. En caso de obtener una polarización lineal, la energía almacenada en el vector de desplazamiento eléctrico es:

$$w^D = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} dv = \frac{1}{2\epsilon} \int |\vec{D}|^2 dv \quad (15)$$

De donde la densidad de energía electrostática en presencia de un dieléctrico homogéneo se comporta como:

$$w_d^D = \frac{dw^D}{dv} = \frac{1}{2\varepsilon} |\vec{D}|^2 = \frac{\varepsilon}{2} |\vec{E}|^2 \quad (16)$$

3.1.3. Magnetostática en el espacio libre

La teoría magnetostática en el espacio libre, describe el comportamiento de los campos magnéticos, aislados en este caso de los campos eléctricos, debido a que se limita solo al margen estacionario. Así mismo, esta teoría asume que existen campos magnéticos producidos por corrientes estacionarias; siendo el espacio libre un lugar con permeabilidad magnética $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{NA}^{-2}$ [43], en donde se establecen a continuación algunas de las ecuaciones que proporcionan información sobre los campos magnetostáticos:

- **Ley de Gauss para el campo magnetostático**

La ley de Gauss para el campo magnetostático establece que el flujo producido por el campo magnético a través de una superficie cerrada siempre es cero dentro y fuera de esta, es decir, las líneas de campo magnético deben ser cerradas. Hecho que concuerda con las demostraciones experimentales sobre inexistencia de monopolos magnéticos:

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (17) \quad \vec{B}(\vec{r}') \text{ Campo magnetostático}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{B}(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (18)$$

- **Ley de Ampère**

La ley de Ampère no generalizada, nos indica que la circulación de un campo magnetostático a lo largo de una curva cerrada es producido por la densidad de corriente estacionaria en la superficie encerrada de la misma curva. En otras palabras, el rotacional del campo magnetostático es proporcional a $\vec{J}(r)$ la densidad de corriente estacionaria:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (19) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_f(r) \quad (20)$$

Donde $I = \int \vec{J}_f(r) \cdot d\vec{s}$

- **Ecuación de Poisson para el potencial vectorial**

Si se separa la definición del campo magnético (18) en el rotacional de una nueva cantidad vectorial asociada, la cual se nombra tradicionalmente potencial vectorial magnético $\vec{A}(r)$, se tiene que:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (21) \quad \vec{A}(r) \text{ Potencial Vectorial magnetostático}$$

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Aplicando (21) en (20) y desarrollando una identidad vectorial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Siendo la corriente estática, en este caso no existe flujo $(\nabla \cdot \vec{A}) = 0$. Por tanto, se obtiene una ecuación vectorial que relaciona el potencial vectorial magnético con la densidad de corriente estacionaria:

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{J}(r) \quad (22)$$

- **Discontinuidad del campo magnetostático**

Al estudiar las condiciones de frontera para el campo magnetostático a través de una superficie abierta o cerrada con una densidad de corriente superficial.

Si se crea un cilindro alrededor de la superficie cargada con altura despreciable para que la única contribución provenga de las bases del cilindro, de tal forma que en ambos lados de la superficie existan campos magnéticos normales \vec{B}_{1n} y \vec{B}_{2n} ; se obtiene como consecuencia de la ley de Gauss (17) que en la superficie la componente normal del campo magnético es continua:

$$(\vec{B}_{1n} - \vec{B}_{2n}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (23)$$

De igual forma como consecuencia de la ley de Ampère no generalizada (20), al calcular el campo magnético a través de una trayectoria cerrada en la superficie, se tiene que la

componente tangencial del campo magnético es discontinua debido a la existencia de una corriente superficial libre \vec{k}_f :

$$(\vec{B}_{2\tau} - \vec{B}_{1\tau}) \times \hat{n} = \mu_0 \vec{k}_f \quad (24)$$

- **Energía presente en el campo magnetostático**

En una distribución continua de corrientes estacionarias donde $\sum_{i=1}^N I_i d\vec{l}_i \rightarrow \vec{J}(r)dv$, la energía almacenada se encuentra relacionada con los campos magnéticos que se propagan en el espacio libre a consecuencia de la ecuación (20) en la forma:

$$w_m = \frac{1}{2} \int \vec{A}(r) \cdot \vec{J}(r) dv = \frac{1}{2\mu_0} \int |\vec{B}|^2 dv \quad (25)$$

Como resultado, la densidad de energía magnetostática en un volumen del espacio es:

$$w_d^m = \frac{dw_m}{dv} = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \quad (26)$$

3.1.4. Magnetostática en la materia

La magnetostática en la materia analiza y comprende los fenómenos asociados a la interacción de los campos magnéticos con distintos medios materiales susceptibles a su propagación en el margen estacionario. Dividiéndose estos medios en materiales homogéneos, lineales, e isotrópicos con susceptibilidad magnética constante a lo largos de cualquier dirección en el material; y en materiales no-homogéneos, con una susceptibilidad magnética que varían en función de la posición en el material [43]. Es por esto que, las ecuaciones relacionadas con la teoría magnetostática se deben modificar introduciendo un término que dé cuenta de esta interacción con la materia, como veremos a continuación:

- **Ley de Gauss magnetostática en la materia**

Dado que el rotacional del potencial vectorial magnético en el interior de los materiales sigue siendo el mismo, las líneas de campo magnético en el interior de un medio

magnetizable siguen siendo cerradas (tomando el hecho experimental de inexistencia de monopolos magnéticos), se tiene que la ley de Gauss en medios materiales sigue siendo expresada por (17).

- **Ley de Ampère modificada para campos magnéticos en la materia**

Entendiendo que un medio magnetizable tiene una corriente de magnetización \vec{J}_M , y considerando la presencia de corrientes libres \vec{J}_f , se puede escribir el rotor del campo magnético (20) como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J}_M + \vec{J}_f) \quad (27)$$

Para un medio magnetizable lineal homogéneo la corriente de magnetización \vec{J}_M , representa la densidad de circulación de la magnetización \vec{M} , el cual es el término que proporciona información sobre la interacción del campo magnético con la materia:

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (28)$$

Rescribiendo el rotor del campo magnético (27) con ayuda de (28):

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f \quad (29)$$

Definiendo el vector intensidad del campo magnético como $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$, se encuentra la ley de Ampère modificada:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f \quad (30)$$

- **Ecuación de Poisson para el potencial vectorial en medios materiales**

En materiales lineales homogéneos e isotrópicos, se verifica que el vector de magnetización es proporcional a la intensidad del campo magnético:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (31)$$

En consecuencia, se puede reescribir \vec{H} de la forma:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H}$$

Como resultado, se encuentra que los campos magnéticos son μ veces la intensidad del campo magnetostático:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (32)$$

La permeabilidad magnética depende de la susceptibilidad magnética del material. Definiendo la permeabilidad del medio material como:

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

Donde χ_m se conoce como la susceptibilidad magnética. Para materiales diamagnéticos χ_m es negativa, tal que $\mu < 1$; mientras que en los materiales paramagnéticos χ_m es positiva, tal que $\mu > 1$. Esta relación se vuelve más compleja en materiales no-homogéneos, no-isotrópicos, porque la susceptibilidad magnética tiende convertirse en un tensor $\chi_m \rightarrow \hat{\chi}_m$, donde su valor depende de la posición en el material.

Retomando (29) e introduciendo (31) y (32) en ella, se encuentra que:

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H} \right) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu} \right) = \vec{J}_f$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J}_f$$

Recordando que el campo magnético puede expresarse como el rotacional del potencial vectorial magnético:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}_f$$

En el margen estacionario la ecuación se reduce a:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_f \quad (33)$$

Donde finalmente (33) resulta ser la ecuación vectorial de Poisson modificada para materiales homogéneos.

- **Discontinuidad del campo magnetostático en medios homogéneos**

Las condiciones de frontera o contorno, que los campos \vec{H} y \vec{B} satisfacen en una interface entre dos medios permeables magnéticamente pueden ser obtenidas de las ecuaciones (17)

y (30), mediante un procedimiento semejante al empleado para el campo magnético en el vacío (revisar la sección 3.1.3); de esta forma se obtiene que:

La componente normal del campo magnético a través de la interface entre los dos medios es continua:

$$(\vec{B}_{1n} - \vec{B}_{2n}) \cdot \hat{n} = 0 \quad (34)$$

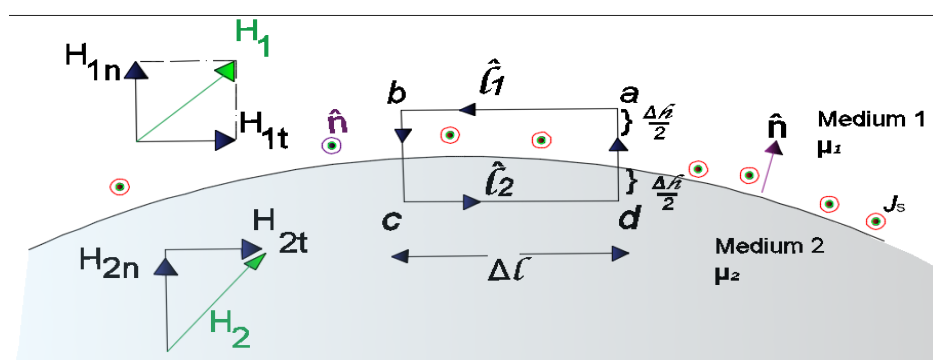


Figura 4. Geometría de las condiciones de frontera magnetostáticas en un medio lineal.

Mientras que la componente tangencial de la intensidad del campo magnetotático sólo lo es en ausencia de corrientes superficiales libres \vec{k}_f :

$$(\vec{H}_{2\tau} - \vec{H}_{1\tau}) \times \hat{n} = \vec{k}_f \quad (35)$$

- **Energía del campo magnetostático en presencia de materiales homogéneos, lineales, isótropicos**

A diferencia de la expresión obtenida en la sección 3.1.3 para la energía almacenada en el campo magnético, se encuentra ahora, que debido a la modificación realizada a la ecuación de Ampère (30) la expresión varía de la siguiente manera:

$$w^M = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dv = \frac{\mu}{2} \int |\vec{H}|^2 dv \quad (36)$$

Igualmente, la densidad de energía magnetostatica en presencia de materiales homogéneos, lineales, isótropicos varía en:

$$w_d^M = \frac{dw}{dv} = \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H}) = \frac{1}{2\mu} |\vec{B}|^2 \quad (37)$$

3.1.5. Teorema de Unicidad del Potencial

El teorema de unicidad del potencial interpretado para la ecuación de Poisson establece que, para una diversidad de condiciones de contorno, la ecuación puede tener soluciones múltiples, pero el gradiente de cada solución es único. En el caso de la electrostática, esto significa que hay un campo electrostático único derivado de una función potencial que satisface la ecuación de Poisson y las condiciones de contorno (Dirichlet o Neumann) [44]. Cabe destacar que también hay teoremas de unicidad asociados con la magnetostática; por ejemplo, si la densidad de corriente \vec{J}_f se especifica a lo largo de cierto volumen V , o bien el campo magnético \vec{B} , o el potencial vectorial magnético \vec{A} , se especifica en la superficie de delimitación S , el campo magnético se determinaría de forma única a lo largo de V y sobre S [45].

3.2. Teoría cuántica de la materia

En la presente sección se desarrolla el fundamento teórico del cual se deriva la ecuación de Schrödinger y la ecuación de Dirac [5], [46], [47], [48], para posteriormente relacionar el Modelo de Jackiw-Rebbi [3] con la ecuación estacionaria unidimensional de Dirac [35]; bajo el sistema internacional de medida M.K.S a excepción de las secciones 3.2.3. y 3.2.4 donde se usan unidades $\hbar = c = 1$ por comodidad en algunos procesos.

3.2.1. Deducción de la ecuación de Schrödinger

Gracias a la cuantización primitiva de Bohr donde se manifiesta que los electrones emiten energía en pequeños “cuantos de luz” una vez se mueven de un estado a otro, fenómeno explicado y sustentado anteriormente por Max Planck y Albert Einstein con su denominado efecto foto-eléctrico [4], se introduce la analogía de De Broglie la cual expone que si a un fotón se le asocia una onda y a una partícula material también se le podría asociar un paquete de ondas [6]. Es decir, la materia tendría un comportamiento dual, como ya

sabemos este suceso ha sido comprobado y verificado con éxito; de este modo, cerca de 1924 Erwin Schrödinger utilizaría el principio de correspondencia para asociar la energía presente en un oscilador clásico con la descrita por una partícula con comportamiento ondulatorio como el electrón [48]. Así mismo, establecería la mecánica cuántica ondulatoria a través de su famosa ecuación.

Utilizando notación actual describiremos de manera similar el proceso que condujo a Erwin Schrödinger a su famosa ecuación [8]. Schrödinger propondría una función de onda que describe el comportamiento ondulatorio de los electrones, y la introduce en la ecuación de onda clásica:

$$\nabla^2\psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\psi(r, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (38)$$

Resolviendo la ecuación por separación de variable $k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$,

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) + k^2\varphi(\vec{r}) = 0$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r})e^{i\omega t}$$

Asumiendo la energía de un oscilador clásico $E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$, y considerando $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$ gracias a De Broglie, se tiene:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi(\vec{r}) + V(\vec{r})\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}) \quad (39)$$

Resultando la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (39), la cual describe el comportamiento de un electrón estacionario afectado por un potencial.

Si la función de onda $\psi(\vec{r}, t)$ se expresase en términos de una transformada de Fourier:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\vec{k}) \mathbf{exp}[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] d^3k \quad (40)$$

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) f(\vec{k}) \mathbf{exp}[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] d^3k \quad (41)$$

Para un fotón $E = \hbar\omega$,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int E f(\vec{k}) \mathbf{exp}[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] d^3k \quad (42)$$

Igualando las ecuaciones (41) y (42), se obtiene una ecuación de Schrödinger que describe el comportamiento de un electrón en el tiempo cuando es afectado por un potencial:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

3.2.2. Interpretación cuántica de una partícula Relativista

Cerca del año 1926 Oskar Klein y Walter Gordon, vislumbraron la posibilidad de obtener una ecuación que describiera el comportamiento de las partículas bosónicas, como por ejemplo los fotones, y que tomara en cuenta la cinemática de la teoría especial de la relatividad en su movimiento [35]. En este caso, partiendo de la energía relativista de una partícula:

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2 \quad (43)$$

Expresando la función de onda de Schrödinger $\psi(\vec{r}, t)$ como una transformada de Fourier, dependiente del momento $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$,

$$\psi(\vec{r}, t) = \int f(\vec{p}) \mathbf{exp} \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - Et) \right] d^3p \quad (44)$$

$$-\hbar^2 \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) = \int p^2 f(\vec{p}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - Et) \right] d^3 p \quad (45)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{-1}{\hbar^2} (m^2 c^4 + c^2 p^2) \int f(\vec{p}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - Et) \right] d^3 p \quad (46)$$

Debido a las expresiones previamente desarrolladas (45), (46), y (43) se encuentra la ecuación relativista de Klein-Gordon, la cual presente un término no lineal en su derivada temporal y produce campos de probabilidad negativa, en consecuencia, solo útil en la teoría cuántica de campos donde la función de onda puede interpretarse como el propio estado físico del espacio-tiempo.

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi(r, t) = 0 \quad (47)$$

3.2.3. Deducción de la ecuación de Dirac

Debido a la necesidad de explicar el comportamiento de algunas partículas de espín semientero, denominadas fermiones, que alcanzan velocidades cercanas a la de la propagación de la luz. Dirac formula en 1928 una versión relativista de la ecuación de Schrödinger [15], la cual se puede deducir partiendo de la energía relativista de una partícula [35], o bajo ciertas condiciones, de la ecuación de Klein-Gordon:

$$\sqrt{(mc^2)^2 + (c\vec{p})^2} \psi(r, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} \quad (48)$$

Donde $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$; para evitar llegar otra vez a la ecuación de Klein-Gordon Dirac razonó que la cantidad dentro de la raíz cuadrada podría ser un cuadrado perfecto, de esta manera consideró:

$$(mc^2)^2 + (c\vec{p})^2 = (\vec{\alpha}\vec{p}c + \beta mc^2)^2 \quad (49)$$

Siendo $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, α_i para $i = 1, 2, 3$, y β cuatro constantes a encontrar (que posteriormente serán las matrices de Dirac). Desarrollando el cuadrado de la parte derecha de la ecuación (48) y factorizando (asumiendo unidades $\hbar = c = 1$ para un desarrollo más cómodo):

$$\sum_i \alpha_i (-i\nabla_i)^2 + \sum_{i>j} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) (-i\nabla_i) (-i\nabla_j) + \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) (-i\nabla_i) m + \beta^2 m^2 \quad (50)$$

Igualando cada uno de los coeficientes de (50) con la parte izquierda de la ecuación (49), Dirac encontró que α_i y β deben cumplir ciertas condiciones, tal que:

1. $\alpha_i^2 = \mathbb{I}$
2. $\beta^2 = \mathbb{I}$
3. $(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) = 0$ para $i \neq j$
4. $(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) = 0$

Siendo este el caso, las condiciones para que la ecuación (49) se cumpla, pueden reescribirse empleado anticonmutadores, puesto que:

$$\{A, D\} = AD + DA$$

Si este objeto se anula, es porque A y D anticonmutan y por tanto $AD = -DA$, en este orden de ideas, se reescriben las condiciones:

1. $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$
2. $\{\alpha_i, \beta\} = 0$
3. $\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{I}$ para $i, j = 1, 2, 3$

Resumiendo $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{i,j}\mathbb{I}$

Por tanto, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$ son objetos tales que su cuadrado da la unidad y anticonmutan entre ellos. Estas características hacen que dichos objetos no puedan ser números ordinarios, tienen que ser matrices; las cuales se denominan como matrices de Dirac.

$$\begin{aligned}
 [\alpha_x] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & [\alpha_z] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 [\alpha_y] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & [\beta] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Una forma más compacta de reescribir estas matrices es utilizando las matrices de Pauli [47]:

$$[\beta] = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad [\alpha_j] = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación de Dirac tiene la forma entonces en unidades M.K.S.:

$$\left(\beta mc^2 + \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j c \right) \psi(r, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} \quad (51)$$

3.2.4. Modelo de Jackiw-Rebbi (Energía de punto cero)

El modelo Jackiw-Rebbi [3] describe un campo de Dirac unidimensional acoplado a un campo de solitón de fondo estático, se conoce como una de las primeras descripciones teóricas de un aislante topológico en el que el modo de energía cero puede entenderse como el estado del borde o límite en una determinada región. En particular, el modelo Jackiw-Rebbi ha sido estudiado por Su, Shrieffer y Heeger en el límite continuo de poliacetileno [49]. La ecuación estacionaria unidimensional de Dirac en presencia de un campo externo $\varphi(x)$ con unidades $\hbar = c = 1$, está dada al reducir (51) en la siguiente expresión:

$$\hat{H}_D \Psi(x) = [\sigma_y \hat{p} + \sigma_x \varphi(x)] \Psi(x) = \mathcal{E} \Psi(x) \quad (52)$$

Donde,

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Empleando las matrices de Pauli [46] σ_y y σ_x para obtener un espinor real de dos componentes $\Psi(x)$. Este Hamiltoniano de Dirac (52) posee además una simetría quiral definida por el operador σ_z (matriz de Pauli), que anticonmuta con el hamiltoniano de Dirac $\{\hat{H}_D, \sigma_z\} = 0$. La simetría quiral implica que los estados propios vienen en pares con energía positiva y negativa $\pm \mathcal{E}$, respectivamente. Sin embargo, es posible que un estado propio sea su propio socio para $\mathcal{E} = 0$, es decir que este adquiere valores positivos y negativos para ser su propio par, si este es el caso, entonces el estado está protegido topológicamente. El estado propio de energía cero resultante está protegido por la topología del campo escalar,

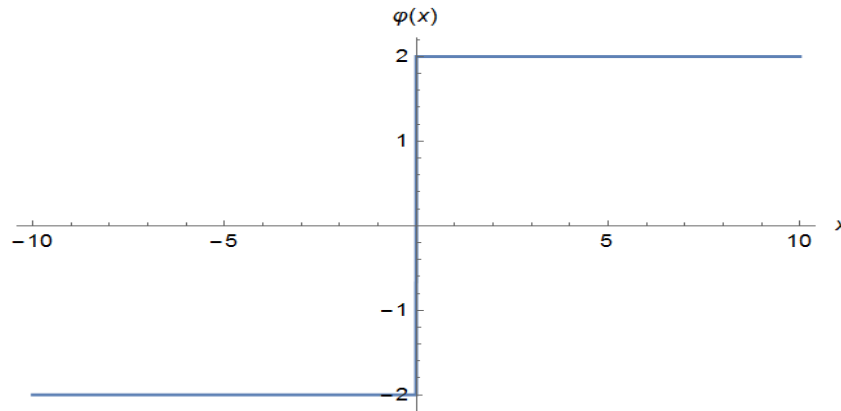


Figura 5. Muestra el potencial escalar externo $\varphi(x)$ que cambia el signo en la interfaz $x=0$.

cuya existencia está garantizada por el teorema de índice, que se localiza alrededor del solitón (onda no lineal que se propaga sin deformarse) [3]. El modelo Jackiw-Rebbi usa $\varphi(x) = m \tanh(\lambda x)$ para el campo de potencial escalar, con $m > 0$ y $\lambda > 0$. Por simplicidad se considera un campo de potencial escalar de la forma:

$$\varphi(x) = m \frac{x}{|x|} \quad (52.1)$$

Formando una pared de dominio en $x = 0$ donde $\varphi(x = 0) = 0$. El campo escalar dado por la ecuación (52.1), la cual es una simplificación del modelo Jackiw-Rebbi propuesta por primera vez por Rajaraman-Bell [38]. La forma precisa del potencial escalar externo no es importante siempre que se aproxime asintóticamente con un signo opuesto en $x \rightarrow \pm\infty$. La función de onda puede cambiar en función de una forma particular del potencial escalar externo, pero la existencia del estado de energía cero está determinada únicamente por el hecho de que la masa es positiva en un lado y negativa en el otro, esto quiere decir que la masa del fermión hace que el potencial sea asimétrico de manera que sus valores asintóticos en dos infinitos espaciales sean diferentes [39]. Por lo tanto, la solución para el potencial escalar externo es muy amplia.

La solución de la ecuación de Dirac (52) con una energía exactamente cero para el campo escalar (52.1), se obtiene resolviendo la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\partial_x + \varphi(x) \\ \partial_x + \varphi(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = 0$$

Encontrando que,

$$\psi_i(x) = C_{1,2} \exp\{m|x|\}_{1,2} \quad i = 1,2 \quad (52.2)$$

Donde $C_{1,2}$ es la constante de normalización. Si se normaliza la función (52.2) es evidente que C_2 debe tender a cero para evitar problemas de divergencia. A continuación, en la [figura 6](#) se muestra la función de onda para el estado de energía cero del modelo Jackiw-Rebbi.

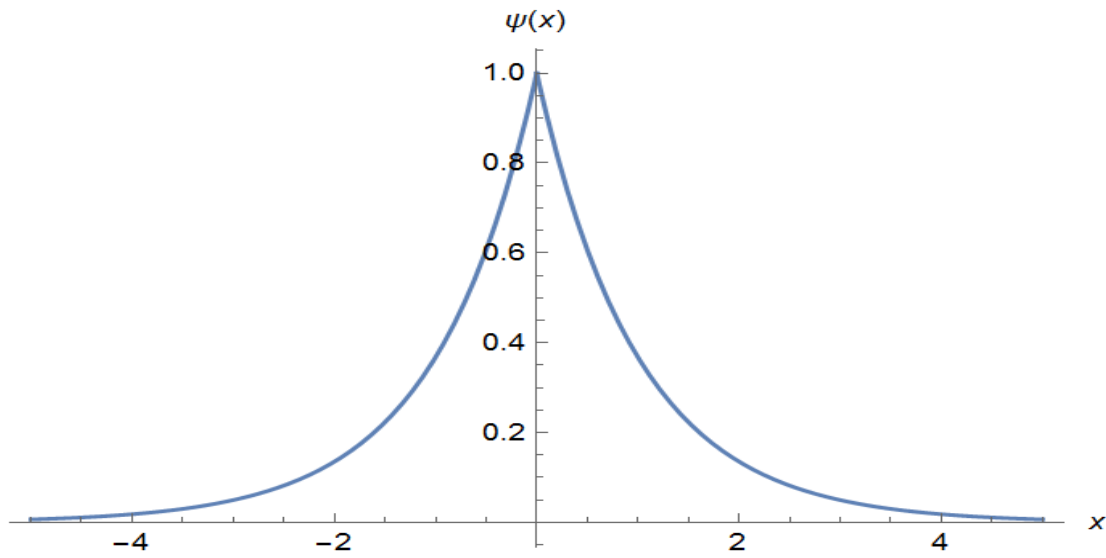


Figura 6. Modo de energía cero Jackiw-Rebbi dado por la ecuación (52.2) para el campo escalar externo representado en la [figura 5](#); el estado se localiza alrededor de $x=0$.

4. Metodología

En la presente sección describiremos las transformaciones empleadas por Gabriel González [1] y Rokaj [2] para convertir la ecuación de Poisson, mediante una configuración de campos eléctricos o magnéticos en el espacio libre, en una ecuación tipo Schrödinger. Luego, extenderemos esta técnica utilizando la ecuación unidimensional de Poisson en medios materiales homogéneos, lineales, isotrópicos y no-homogéneos para los casos electrostáticos y magnetostáticos, respectivamente con unidades de medida del M.K.S a excepción de la sección 4.3. donde se emplea por comodidad unidades $\hbar = c = 1$.

4.1. FASE 1: Transformaciones de González y Rokaj

Fue desarrollada por Gabriel González en el 2012 [1] inicialmente para una configuración de campos electrostáticos en el espacio libre, basado en la amplia implementación de potenciales asociados a la función delta de Dirac en mecánica cuántica [22], [21], [50], [51]. A partir de esta transformación, se siguió una modificación realizada por Vasil Rokaj en el 2014 [2] para su aplicación a una configuración de campos magnetostáticos en el vacío. Un aspecto importante de estas transformaciones son su sencillez, una vez aplicadas a la ecuación Poisson en el espacio libre conllevan a ecuaciones estacionarias tipo Schrödinger. Esto es posible porque González y Rokaj, encuentran que las condiciones de frontera del potencial escalar eléctrico y del potencial vectorial magnético, en una dimensión, en el espacio libre, pueden estar relacionadas con las condiciones de una función de onda cuántica.

González y Rokaj exponen los siguientes límites:

- El potencial escalar electrostático en el vacío $\Phi(\vec{r})$ es continuo a través de cualquier frontera, a excepción de su derivada normal (52) que es discontinua la superficie.

$$\Delta \left(\frac{d\vec{\Phi}}{dn} \right) = -\frac{\sigma_f}{\epsilon_0} \quad (52)$$

- El potencial vectorial magnetostático $\vec{A}(\vec{r})$ en el vacío presenta de manera análoga los mismos límites del potencial escalar electrostático. En una dimensión del espacio cuando el potencial vectorial magnetostático y la corriente superficial son escalares, se tiene la siguiente expresión:

$$\Delta \left(\frac{d\vec{A}}{dn} \right) = -\mu_0 \vec{k}_f \quad (53)$$

- La función de onda propia cuántica $\psi(z)$ siempre es continua a excepción de su derivada, la cual es discontinua en los puntos donde su potencial es infinito $\Phi(z) = V_0 \delta(z)$. Existe una discontinuidad en la derivada de la función de onda propia proporcional a la función de onda en z_0 (y a la fuerza del potencial de la función delta).

$$\left. \frac{d\psi(z)}{dz} \right|_{+\epsilon} - \left. \frac{d\psi(z)}{dz} \right|_{-\epsilon} = \text{constante} V_0 \psi(z_0)$$

Particularmente, debido a estos límites, plantean que la única forma en que pueden ser iguales es mediante la existencia de un potencial de función delta. En consecuencia, proponen las siguientes transformaciones:

1. Potencial escalar electrostático [1]:

$$\vec{\Phi}(\vec{r}) = V_0 \ln \left(\frac{\Psi(\vec{r})}{y} \right) \quad (54)$$

2. Potencial vectorial magnetostático [2]:

$$A_x(z) = A_0 \ln \left[\frac{\Psi(z)}{C} \right] \quad (55)$$

Donde V_0, A_0, y, C son constantes que aseguran la consistencia dimensional. Una vez aplicadas las transformaciones (54) y (55) a las ecuaciones (2) y (22) se obtienen ecuaciones tipo Schrödinger con potenciales de función delta de Dirac, según la configuración de campos empleada.

De este modo se propone en el presente trabajo, usar las transformaciones (54) y (55) en la ecuación de Poisson para medios materiales homogéneos y no-homogéneos, debido a que

se presentará una versión más general de la relación encontrada por González y Rokaj; siguiendo este orden de ideas, se deben establecer los límites para los potenciales en la materia:

- El potencial escalar electrostático en la materia $\vec{\Phi}(\vec{r})$ es continuo a través de cualquier frontera, a excepción de su derivada normal que es discontinua la superficie.

$$\Delta \left(\frac{d\vec{\Phi}}{dn} \right) = -\frac{\sigma_f}{\varepsilon} \quad (56)$$

- El potencial vectorial magnetostático $\vec{A}(\vec{r})$ en la materia presenta de manera análoga los mismos límites del potencial escalar electrostático. En una dimensión del espacio cuando el potencial vectorial magnetostático y la corriente superficial son escalares, se tiene la siguiente expresión:

$$\Delta \left(\frac{d\vec{A}}{dn} \right) = -\mu \vec{k}_f \quad (57)$$

Indiscutiblemente las condiciones (56) y (57) son similares a las condiciones (52) y (53). Por consiguiente, se requiere un estudio por separado de cada medio en cuestión, donde se plantean y se desarrollan los cálculos teóricos pertinentes al utilizar una de las transformaciones propuestas en medios materiales homogéneos; de este modo, se expondrá el tema a continuación en dos subsecciones.

4.1.1. Transformación de la ecuación de Poisson en dieléctricos homogéneos

En esta subsección se aplicará la transformación (54) a la ecuación de Poisson en medios materiales (13) con un procedimiento homólogo al seguido por González en [1], cuando aplico su transformación en la ecuación de Poisson en el espacio libre.

Teniendo en cuenta que $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$, se aplica la transformación (54) tal que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -V_0 \frac{\vec{\nabla}\Psi(\vec{r})}{\Psi(\vec{r})} = -V_0 \frac{\Psi'(\vec{r})}{\Psi(\vec{r})} \quad (58)$$

Haciendo un producto punto entre (58):

$$\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = V_0^2 \left(\frac{\Psi'(\vec{r})}{\Psi(\vec{r})} \right)^2 \quad (59)$$

Recordando:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla^2 \Phi(\vec{r}) \quad (60)$$

Empleando la transformación (54) en la ecuación (13):

$$V_0 \frac{\Psi''(\vec{r})}{\Psi(\vec{r})} - V_0 \left(\frac{\Psi'(\vec{r})}{\Psi(\vec{r})} \right)^2 = -\frac{\rho_f}{\epsilon_0(1 + \chi_E)} \quad (61)$$

Introduciendo (59) en (61):

$$-V_0 \frac{\Psi''(\vec{r})}{\Psi(\vec{r})} - \frac{\rho_f}{\epsilon_0(1 + \chi_E)} = -\frac{(\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}))}{V_0} \quad (62)$$

Multiplicando por $\frac{V_0 \epsilon a_0^3}{2}$ a ambos lados de la ecuación (62):

$$\begin{aligned} -\frac{V_0^2 \epsilon a_0^3}{2} \frac{\Psi''(\vec{r})}{\Psi(\vec{r})} - \frac{\epsilon V_0 a_0^3 \rho_f}{2\epsilon} &= -\epsilon a_0^3 \frac{(\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}))}{2} \\ -\frac{V_0^2 \epsilon a_0^3}{2} \Psi''(\vec{r}) - \frac{V_0 a_0^3 \rho_f}{2} \Psi(\vec{r}) &= -\epsilon a_0^3 \frac{(\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})) \Psi(\vec{r})}{2} \end{aligned}$$

Donde a_0 es una distancia arbitraria y se escoge tal que satisfaga $[V_0^2 \epsilon_r a_0^3] = \left[\frac{\hbar^2}{m} \right]$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi''(\vec{r}) - \frac{V_0 a_0^3 \rho_f}{2\epsilon_r} \Psi(\vec{r}) = -\epsilon a_0^3 \frac{(\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})) \Psi(\vec{r})}{2\epsilon_r}$$

Asumiendo por simplicidad el problema en una dimensión $\Psi(\vec{r}) \rightarrow \Psi(z)$, ya que la única forma de obtener una ecuación tipo Schrodinger depende de que la magnitud del campo

electrostático $|\vec{E}|$ sea constante. Es decir, se requiere una configuración electrostática que produzca campos uniformes en una dirección:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(z)}{dz^2} - \frac{V_0 a_0^3 \rho_f(z)}{2\varepsilon_r} \Psi(z) = -\varepsilon a_0^3 \frac{(E_z^2)\Psi(z)}{2\varepsilon_r}$$

Realizado las sustituciones apropiadas, se definen la energía del sistema (64) y la energía potencial (65):

$$\frac{\varepsilon a_0^3 E_z^2}{2\varepsilon_r} = |\xi| \quad (64)$$

$$-\frac{V_0 a_0^3 \rho_f(z)}{2\varepsilon_r} = U(z) \quad (65)$$

(13) se transforma entonces de la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(z)}{dz^2} + U(z)\Psi(z) = -|\xi| \Psi(z) \quad (66)$$

Para el caso de estados ligados, es decir $\xi < 0$. Esta última ecuación evidencia que la función propia y los valores propios de energía del estado ligado se darán en términos del potencial eléctrico y la densidad de energía mediante:

$$\Psi(z) = y e^{\frac{\Phi(z)}{V_0}}, \quad \xi = -w_d^e \quad (67)$$

$$w_d^e = \frac{|\xi|}{a_0^3} = \frac{\varepsilon_0 E_z^2}{2} \quad (68)$$

Siendo y una constante de normalización y w_d^e la densidad de energía electrostática (16). Es importante destacar que la función propia no tiene nodos, por tanto, solo es posible determinar el estado fundamental mediante este método. Esto es consistente con el teorema de unicidad del potencial (revisar sección 3.1.5), el cual garantiza que el potencial electrostático es unívoco si la distribución de la densidad de carga eléctrica está especificada en todos los límites.

4.1.2. Transformación de la ecuación de Poisson en medios magnetizables

homogéneos

En esta subsección se aplicará la transformación (55) a la ecuación vectorial de Poisson en la materia (33) con un procedimiento semejante al seguido por Rokaj [2], cuando aplicó su transformación en la ecuación vectorial de Poisson en el vacío.

Asumiendo el caso unidimensional ya que para obtener una ecuación tipo Schrödinger se debe encontrar de manera análoga al caso electrostático, una configuración de campos magnetostáticos uniformes en la materia; la ecuación (33) se reduce a:

$$\frac{d^2}{dz^2} A_x(z) = \mu J_x(z) \quad (69)$$

Aplicando la transformación (55) a la ecuación (69)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} A_x(z) &= A_0 \left\{ \frac{\Psi''(z)}{\Psi(z)} - \left(\frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)} \right)^2 \right\} \\ A_0 \left\{ \frac{\Psi''(z)}{\Psi(z)} - \left(\frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)} \right)^2 \right\} &= \mu J_x(z) \end{aligned} \quad (70)$$

Suponiendo una configuración de corrientes estacionarias, tal que la única contribución de campos magnetostáticos originados venga en dirección de la componente \hat{y} :

$$B_y = (\nabla \times A)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \approx \frac{\partial A_x}{\partial z}; \quad \frac{\partial A_z}{\partial x} \approx 0 \quad (70.1)$$

Sin pérdida de generalidad:

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} = A_0 \frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)}$$

Realizando un producto entre $B_y \cdot B_y$:

$$B_y^2 = A_0^2 \left(\frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)} \right)^2 \quad (71)$$

Reemplazando (71) en (70):

$$\frac{A_0}{\Psi(z)} \frac{d^2 \Psi(z)}{dz^2} - \frac{B_y^2}{A_0} = \mu J_x(z) \quad (72)$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación (72) por $\frac{A_0 b_0^3}{2\mu} \Psi(z)$

$$-\frac{A_0^2 b_0^3}{2\mu} \frac{d^2 \Psi(z)}{dz^2} - \frac{A_0 b_0^3}{2} J_x(z) = -\frac{b_0^3}{2\mu} B_y^2 \Psi(z) \quad (73)$$

Efectuando análisis dimensional sobre las constantes que acompañan la segunda derivada de la función en (73), donde b_0 es una distancia arbitraria que se escoge tal que:

$$\left[\frac{A_0^2 b_0^3}{\mu_0} \right] = \left[\frac{\hbar^2}{m} \right]$$

Llevando a cabo las sustituciones apropiadas en (73), definimos un potencial $U(z)$ y una densidad de energía w_d^m , tal que:

$$-\frac{A_0 \mu_r b_0^3}{2} J_x(z) = U(z) \quad (74)$$

$$\frac{b_0^3 \mu_r B_y^2}{2\mu} = |\xi|, \quad \xi = -w_d^m \quad (75)$$

Como se observa, obtenemos una ecuación tipo Schrödinger independiente del tiempo asociada a campos magnetostáticos en la materia que con un procedimiento análogo a la subsección 4.1.1. (33) se transforma en:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(z)}{dz^2} + U(z) = -|\xi| \Psi(z) \quad (76)$$

Para el caso de estados ligados; es decir $\xi < 0$, la relación (76) significa que la función propia y los valores propios de energía del estado ligado (igualmente consistente con el teorema de la sección 3.1.5.) se darán en términos del potencial magnético y la densidad de energía por:

$$\Psi(z) = C e^{\frac{A(z)}{A_0}}, \quad \frac{|\xi|}{a_0^3} = \frac{1}{2\mu_0} B_y^2 = w_d^m \quad (77)$$

Donde C es la constante de normalización y w_d^m la densidad de energía magnetostática (37).

4.2. FASE 2: Soluciones a las ecuaciones tipo Schrödinger

En la Fase 2 se establecerán métodos solución a las ecuaciones (66) y (76), encontradas mediante procesos matemáticos basados en la configuración de campos electrostáticos y magnetostáticos, respectivamente.

4.2.1. Solución a la ecuación tipo Schrödinger encontrada en 4.1.1

Suponiendo una distribución impar de placas infinitas paralelas con densidades de carga eléctrica alternativas $\pm\sigma$ [42], [43], a las cuales se les atribuye un campo electrostático uniforme en presencia de un dieléctrico lineal, se considera una densidad de carga volumétrica [1], [52]:

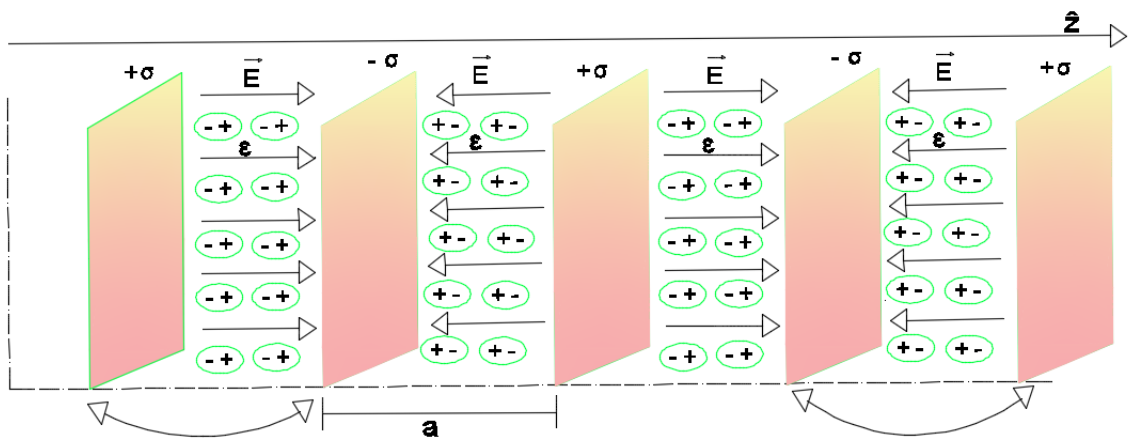


Figura 7. Configuración de placas paralelas conductoras infinitas, espaciadas una distancia a con un dieléctrico lineal, homogéneo, isotrópico entre ellas.

$$\rho_f(z) = \sigma \sum_{n=-N}^N (-1)^n \delta(z - z_n), \quad \text{para } N = 0, 1, 2 \dots \quad (78)$$

Siendo el caso trivial $N = 0$ con $z_0 \approx 0$ (ubicación de la primera placa)

$$\rho_f(z) = \sigma \delta(z) \quad (79)$$

El campo electrostático primero se calcula para una sola placa infinita [53] ubicada en z_0 debido a que se irán ubicando placas a la derecha y a la izquierda [1]. Supongamos que el espacio a los lados de la placa haya sido ocupado por un dieléctrico lineal, homogéneo,

isotrópico con una constante dieléctrica ε determinada, hemos idealizado su comportamiento de la forma (revisar apéndice A):

$$\vec{E}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \hat{e}_z \quad (80)$$

De esta manera el potencial electrostático vendría dado al resolver la ecuación (1.1) con el campo (80), y la densidad de energía w_d^e se encontraría al realizar la operación (68) con este mismo campo electrostático:

$$\phi(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon} |z|, \quad w_d^e = \frac{\sigma^2}{8\varepsilon_0 \varepsilon_r^2} \quad (81)$$

Igualmente obtenemos la función propia para el estado ligado y los valores propios de energía presente del caso trivial. Al reemplazar en la ecuación (67) la ecuación (81):

$$\Psi(z) = y e^{-\frac{\sigma}{2V_0 \varepsilon} |z|}, \quad \xi = -\frac{\sigma^2}{8\varepsilon_0 \varepsilon_r^2} \quad (81.1)$$

Se observa que la función propia (81.1) solo puede normalizarse para $\sigma > 0$, debido a que diverge cuando $z \rightarrow -\infty$. Empleando las ecuaciones (65) y (79) se obtiene la función de energía potencial $U(z) = -\frac{\alpha_1}{\varepsilon_r} \delta(z)$ para el caso mecano cuántico, donde $\alpha_1 = \frac{\sigma V_0 a_0^3}{2}$ es la intensidad del potencial. Utilizando sustituciones adecuadas:

$$\Psi(z) = y \mathbf{exp} \left(\frac{-\sigma}{2\varepsilon} |z| \frac{V_0 a_0^3}{V_0^2 a_0^3} \right) = y \mathbf{exp} \left(\frac{-m \alpha_1}{\hbar^2 \varepsilon_r} |z| \right) \quad (82)$$

Realizando análisis dimensional a los coeficientes constantes que acompañan la exponencial (82):

$$\left[\frac{m \sigma V_0 a_0^3}{\hbar^2} \right] = \left[\frac{1}{l} \right]$$

Reescribiendo la energía (81.1) se encuentran unidades relacionadas con constantes cuánticas para la energía,

$$\xi = -\frac{\sigma^2}{8\varepsilon_r^2} \frac{V_0^2 a_0^6}{V_0^2 a_0^6 \varepsilon_0} = -\frac{m \alpha_1^2}{2\hbar^2 a_0^3 \varepsilon_r^2} \quad (83)$$

Donde ε_r es la permitividad eléctrica relativa del medio material (ε_r es adimensional) y l una longitud, reescribiendo (82):

$$\Psi(z) = y e^{\frac{-1}{2l\varepsilon_r} |z|}$$

Considerando ahora el caso general $N \geq 1$, $\sigma = \sum_{n=-N}^N (-1)^n \sigma$, el potencial electrostático (81) cambia de manera que describa la configuración de placas propuesta:

$$\phi(z) = \frac{-\sigma}{2\varepsilon} \sum_{n=-N}^N (-1)^n |z - z_n|$$

Considerando el caso en que las placas estén finitamente espaciadas $z_n = na$, donde a es la distancia de separación entre las placas:

$$\phi(z) = \frac{-\sigma}{2\varepsilon} \sum_{n=-N}^N (-1)^n |z - na| \quad (84)$$

Reemplazando (84) en la solución (67):

$$\Psi(z) = y \mathbf{exp} \left\{ \frac{-\sigma}{2V_0\varepsilon} \sum_{n=-N}^N (-1)^n |z - na| \right\}$$

Empleando una vez más análisis dimensional sobre las constantes que acompañan la exponencial $\left[\frac{\sigma}{V_0\varepsilon_0} \right] = \left[\frac{1}{l} \right]$, se determina una función propia que describe el comportamiento del potencial electrostático en la distribución de placas paralelas con un dieléctrico homogéneo en su interior, de la siguiente manera:

$$\Psi(z) = y \mathbf{exp} \left\{ \frac{-1}{2l\varepsilon_r} \sum_{n=-N}^N (-1)^n |z - na| \right\} \quad (85)$$

La función (85) solo puede normalizarse cuando $\sigma \rightarrow (-1)^N \sigma$, es decir $l \rightarrow l(-1)^N$, debido a que diverge cuando $z \rightarrow -\infty$, de este modo para encontrar la constante y :

$$\int_0^{\infty} |\Psi(z)|^2 dz = 1$$

$$|y|^2 \int_0^{\infty} \mathbf{exp} \left\{ \frac{-1}{l\varepsilon_r} \sum_{n=-N}^N (-1)^n |z - na| \right\} dz = 1 \quad (86)$$

Empleando,

$$\sum_{n=-N}^N (-1)^n |z - na| = \sum_{n=-N}^0 (-1)^n |z - na| + \sum_{n=1}^N (-1)^n |z - na|$$

Cambiando n por $-n$ en la primera suma de la derecha:

$$\sum_{n=-N}^N (-1)^n |z - na| = \sum_{-n=-N}^0 (-1)^{-n} |z + na| + \sum_{n=1}^N (-1)^n |z - na|$$

$$\sum_{n=-N}^N (-1)^n |z - na| = \sum_{n=0}^N (-1)^n |z + na| + \sum_{n=1}^N (-1)^n |z - na| \quad (87)$$

Reemplazando (87) en (86) la integral por resolver es:

$$\int_0^{Na} \exp \left[\frac{-1}{l\epsilon_r} \left\{ \sum_{n=0}^N (-1)^n |z + na| + \sum_{n=1}^N (-1)^n |z - na| \right\} \right] dz +$$

$$\int_{Na}^{\infty} \exp \left[\frac{-1}{l\epsilon_r} \left\{ \sum_{n=0}^N (-1)^n |z + na| + \sum_{n=1}^N (-1)^n |z - na| \right\} \right] dz \quad (88)$$

El desarrollo matemático de la integral (88) se muestra paso a paso en el [apéndice B](#), del cual se obtiene la constante de normalización presente en (86):

$$y^{-1} = \left(l\epsilon_r e^{\frac{-Na}{l\epsilon_r}} + 2l\epsilon_r N e^{\frac{-(1+2N)a}{2l\epsilon_r}} \sinh \left(\frac{a}{2l\epsilon_r} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (89)$$

De este modo la función propia (85), se reescribe introduciendo el valor de la constante encontrada en (89) de la forma:

$$\Psi(z) = \frac{\prod_{n=-N}^N e^{\frac{-(-1)^{n+N}|z-na|}{2l\epsilon_r}}}{\left(l\epsilon_r e^{\frac{-Na}{l\epsilon_r}} + 2l\epsilon_r N e^{\frac{-(1+2N)a}{2l\epsilon_r}} \sinh \left(\frac{a}{2l\epsilon_r} \right) \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (90)$$

Por lo tanto, si hacemos las sustituciones apropiadas $l^{-1} = 2m \alpha_1 / \hbar^2$, encontraremos una función propia que modela la función propia y su estado propio de energía ligado, correspondiente a una partícula cuántica de masa m que se mueve en un campo de

potencial, similar a la de un cristal iónico unidimensional que presenta una constante dieléctrica lineal [52], para un rango de frecuencia determinado:

$$\Psi(z) = \frac{\prod_{n=-N}^N e^{\frac{-\alpha_1 m (-1)^{n+N} |z-na|}{\hbar^2 \epsilon_r}}}{\left(\epsilon_r \frac{\hbar^2}{2 \alpha_1 m} e^{\frac{-2\alpha_1 m Na}{\hbar^2 \epsilon_r}} + \epsilon_r \frac{\hbar^2}{\alpha_1 m} N e^{\frac{-\alpha_1 m (1+2N)a}{\hbar^2 \epsilon_r}} \sinh\left(\frac{am \alpha_1}{\hbar^2 \epsilon_r}\right) \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (91)$$

Reemplazando (78) en (65), y teniendo en cuenta las consideraciones $\sigma \rightarrow (-1)^N \sigma$, es decir $l \rightarrow l(-1)^N$,

$$U(z) = -\frac{\alpha_1}{\epsilon_r} \sum_{n=-N}^N (-1)^{n+N} \delta(z - na) \quad (92)$$

Para $N \geq 1$ y $\xi = -\frac{m\alpha_1^2}{2\hbar^2 a_0^3 \epsilon_r^2}$, en el caso del vacío $\epsilon_r \approx 1$. Este nuevo caso muestra que es posible modelar la forma en que es atrapado un solo electrón en un cristal iónico unidimensional que tiene una constante dieléctrica lineal, mediante funciones propias delta repulsivas y atractivas, producidas por la configuración electrostática de placas paralelas, para los iones negativos y positivos [52].

Con la función de onda dada por la ecuación (91) calculamos el valor esperado de la energía potencial utilizando (92):

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= -\frac{\alpha_1}{\epsilon_r} \sum_{n=-N}^N (-1)^{n+N} |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2\alpha_1 m}{\hbar^2 \epsilon_r} \sum_{j=-N}^N (-1)^{j+N} |z-ja|} \delta(z - na) dz \\ \langle U \rangle &= -\frac{\alpha_1}{\epsilon_r} \sum_{n=-N}^N (-1)^{n+N} |A|^2 e^{\frac{-2\alpha_1 ma}{\hbar^2 \epsilon_r} \sum_{j=-N}^N (-1)^{j+N} |n-j|} \\ \langle U \rangle &= -\frac{m \alpha_1^2}{\hbar^2 \epsilon_r^2} \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^{n+N} e^{\frac{-2\alpha_1 ma}{\hbar^2 \epsilon_r} \sum_{j=-N}^N (-1)^{j+N} |n-j|}}{\left(\frac{1}{2} e^{\frac{-2\alpha_1 m Na}{\hbar^2 \epsilon_r}} + N e^{\frac{-\alpha_1 m (1+2N)a}{\hbar^2 \epsilon_r}} \sinh\left(\frac{am \alpha_1}{\hbar^2 \epsilon_r}\right) \right)} \end{aligned}$$

Las contribuciones de las placas cargadas opuestas se cancelan por pares (ver figura 7), dejando la contribución de una sola placa cargada como resultado para las energías medias

correspondientes [2]; de esta forma, el valor esperado de la energía potencial es independiente de N :

$$\langle U \rangle = -\frac{m \alpha_1^2}{\hbar^2 \epsilon_r^2} \quad (93)$$

4.2.2. Solución a la ecuación tipo Schrödinger encontrada en 4.1.2

De forma semejante al caso anterior, se considera el problema de un número impar de placas paralelas infinitas [54], igualmente espaciadas una distancia a con densidades de corriente superficial eléctrica $\vec{K} = \pm k_0 \hat{e}_x$, de manera que la densidad de corriente volumétrica pueda escribirse como [2], [52]:

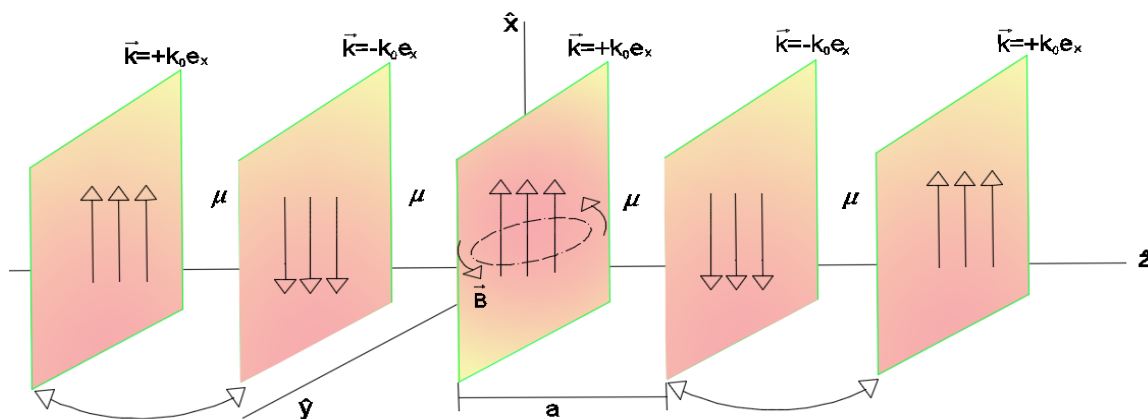


Figura 8. Configuración de placas paralelas infinitas, espaciadas una distancia a que transportan una corriente superficial cada una.

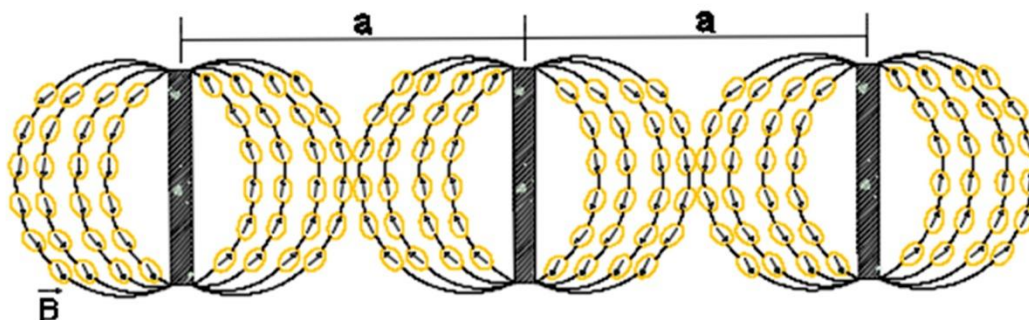


Figura 9. Comportamiento del material lineal, homogéneo, isotrópico, magnetizable entre las placas influenciado por la configuración de campos magnetostáticos en la Figura 8, producto de las corrientes superficiales.

$$\vec{J}_f = \sum_{n=-N}^N (-1)^{n+N} k_0 \delta(z - na) \hat{e}_x \quad (94)$$

Considerando el caso trivial $N = 0$, la distribución de corriente cambia a la forma:

$$\vec{J}_f = k_0 \delta(z) \hat{e}_x \quad (95)$$

El campo magnetostático primero se calcula para una sola placa infinita con densidad de corriente superficial $\vec{K} = \pm k_0 \hat{e}_x$ [53], [54] ubicada en z_0 debido a que se irán ubicando placas a la derecha y a la izquierda [2]. Supongamos que el espacio a los lados de la placa haya sido ocupado por un material magnetizable lineal, homogéneo, isotrópico con una constante de permeabilidad magnética μ determinada, hemos idealizado su comportamiento por medio de (revisar apéndice C):

$$\vec{B}_y = -\frac{\mu k_0}{2} \hat{e}_y \quad (96)$$

De esta forma, el potencial vectorial magnético se determina al resolver (70.1) con el campo magnetostático (96), resultando:

$$A_x(z) = -\frac{\mu k_0}{2} |z| \quad (97)$$

Reemplazando (97) en la ecuación (77) obtenemos la solución del caso trivial y la densidad de energía para el mismo:

$$\Psi(z) = C e^{-\frac{\mu k_0}{2A_0} |z|}, \quad w_d^m = \frac{\mu_r^2 \mu_0 k_0^2}{8} \quad (98)$$

Esta función propia solo se puede normalizar con la condición $k_0 > 0$, para evitar divergencias cuando $z \rightarrow \pm\infty$. Haciendo uso de las ecuaciones (95) y (74) se encuentra la función de energía potencial $U(z) = -\mu_r \alpha_2 \delta(z)$ para el caso mecano cuántico, donde $\alpha_2 = \frac{A_0 b_0^3 k_0}{2}$ es la intensidad del potencial. Realizando apropiadas sustituciones, (98) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\Psi(z) = C \exp \left\{ -\frac{\mu k_0 A_0 b_0^3}{2 A_0 A_0 b_0^3} |z| \right\} = C \exp \left(-\frac{\mu_r \alpha_2 m}{\hbar^2} |z| \right) \quad (99)$$

Considerando ahora el caso general para $N \geq 1$, $k_0 = \sum_{n=-N}^N (-1)^n k_0$, se tiene que reescribir el potencial magnetostático (97) para cumplir con la distribución de placas paralelas propuesta,

$$A_x(z) = -\frac{\mu k_0}{2} \sum_{n=-N}^N (-1)^{n+N} |z - na| \quad (100)$$

Debido a (100) la función propia (77) se convierte en:

$$\Psi(z) = C \exp \left\{ -\frac{\mu k_0}{2A_0} \sum_{n=-N}^N (-1)^{n+N} |z - na| \right\} \quad (101)$$

Haciendo apropiadas sustituciones nuevamente en (101) y realizando análisis dimensional sobre las constantes que terminen acompañando la exponencial (101), se tiene:

$$\left[\frac{\mu_0 k_0}{A_0} \right] = \left[\frac{A_0 m b_0^3 k_0}{\hbar^2} \right] = \left[\frac{1}{L} \right]$$

Siendo L una longitud. Reescribiendo la ecuación (101), se encuentra una función propia que describe el comportamiento del potencial magnetostático producido por una distribución de placas paralelas con un material lineal, homogéneo, e isotrópico entre ellas,

$$\Psi(z) = C \exp \left\{ -\frac{\mu_r}{2L} \sum_{n=-N}^N (-1)^{n+N} |z - na| \right\} \quad (102)$$

μ_r es la permeabilidad relativa del medio y es adimensional. Realizando sustituciones coherentes en los valores propios de energía (98):

$$\xi = -\frac{m \alpha_2^2 \mu_r^2}{2 b_0^3 \hbar^2} \quad (102.1)$$

Normalizando la función propia (102), y realizando un procedimiento análogo al establecido en 4.2.1 para encontrar la constante de normalización C (revisar apéndice D), se determina una expresión similar a (90):

$$\Psi(z) = \frac{\prod_{n=-N}^N e^{\frac{-\mu_r (-1)^{n+N} |z - na|}{2L}}}{\left(\frac{L}{\mu_r} e^{\frac{-\mu_r Na}{L}} + 2 \frac{L}{\mu_r} N e^{\frac{-\mu_r (1+2N)a}{2L}} \sinh \left(\frac{\mu_r a}{2L} \right) \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (103)$$

Así mismo, la función de energía potencial se obtiene al reemplazar (94) en (74):

$$U(z) = -\mu_r \alpha_2 \sum_{n=-N}^N \delta(z - na) \quad (104)$$

Al hacer sustituciones apropiadas $L^{-1} = 2 \alpha_2 m / \hbar^2$ en (103), se encuentra que también es posible modelar una función propia que describe el comportamiento de una partícula cuántica de masa m que atraviesa un cristal iónico unidimensional con energía potencial (104), el cual presenta una constante magnética lineal; entonces (103) se expresa mediante:

$$\Psi(z) = \frac{\prod_{n=-N}^N e^{\frac{-\alpha_2 \mu_r m (-1)^{n+N} |z-na|}{\hbar^2}}}{\left(\frac{\hbar^2}{2\mu_r \alpha_2 m} e^{\frac{-2\mu_r \alpha_2 m Na}{\hbar^2}} + \frac{\hbar^2}{\alpha_2 \mu_r m} N e^{\frac{-\alpha_2 \mu_r m (1+2N)a}{\hbar^2}} \sinh\left(\frac{a\mu_r m \alpha_2}{\hbar^2}\right) \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (105)$$

Este resultado es una consecuencia natural de la dualidad con el problema electrostático, en caso del vacío $\mu_r \approx 1$. Por lo tanto, el potencial (104) que modela una función propia (105), resulta válida tanto para materiales paramagnéticos donde χ_m es positiva, como para materiales diamagnéticos donde χ_m es negativa [44]. Encontrando además que la función de energía potencial (104) presenta matemáticamente una estructura similar a la de un cristal iónico unidimensional [52], siendo modelados los iones positivos y negativos por funciones propias delta repulsivas y atractivas.

Con la función propia modelada por la ecuación (105) podemos calcular el valor esperado de la energía potencial utilizando (104):

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= -\mu_r \alpha_2 \sum_{n=-N}^N (-1)^{n+N} |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\alpha_2 \mu_r m (-1)^{j+N} |z-ja|}{\hbar^2}} \delta(z-na) dz \\ \langle U \rangle &= -\mu_r \alpha_2 \sum_{n=-N}^N (-1)^{n+N} |C|^2 e^{\frac{-\alpha_2 \mu_r m a (-1)^{j+N} |n-j|}{\hbar^2}} \\ \langle U \rangle &= -\frac{m\mu_r^2 \alpha_2^2}{\hbar^2} \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^{n+N} e^{\frac{-2\alpha_2 m a}{\hbar^2 \epsilon_r} \sum_{j=-N}^N (-1)^{j+N} |n-j|}}{\left(\frac{1}{2} e^{\frac{-2\mu_r \alpha_2 m Na}{\hbar^2}} + N e^{\frac{-\alpha_2 \mu_r m (1+2N)a}{\hbar^2}} \sinh\left(\frac{a\mu_r m \alpha_2}{\hbar^2}\right) \right)} \quad (105.1) \end{aligned}$$

Las contribuciones de las placas cargadas opuestas se cancelan por pares (como se mencionó en la [sección 4.2.1](#), ver figura 8), dejando la contribución de una sola placa como

resultado final para las energías medias correspondientes [2]; por tanto, el valor esperado de la energía potencial es independiente de N:

$$\langle U \rangle = -\frac{m\mu_r^2\alpha_2^2}{\hbar^2} \quad (106)$$

4.3. FASE 3: Transformación de la ecuación de Poisson en medios magnetizables no-homogéneos, no-isotrópico

Como una extensión al estudio de las analogías encontradas por González y Rokaj, y a diferencia de las secciones anteriores donde se emplearon medios homogéneos, en la presente sección se establecerá una relación entre la ecuación unidimensional de Poisson en medios magnetizables no-homogéneos, no-isotrópico y la ecuación unidimensional de Dirac para la energía de punto cero; en otras palabras, se mostrará la rigurosidad matemática con la cual se encontró dicha relación. Es muy probable que esta relación también se pueda obtener para el caso electrostático, pero solo nos interesa analizar el caso magnetostático en este Trabajo de Grado.

Tomando en cuenta que ahora la permeabilidad magnética es una función que depende de la posición, para el caso unidimensional se tiene que (33) debe expresarse de la forma:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\mu(x)} \frac{dA_z}{dx} \right) = -J_z(x) \quad (107)$$

$$\frac{d^2 A_z}{dx^2} - \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} \frac{dA_z}{dx} = -\mu(x) J_z(x) \quad (108)$$

Aplicando en la ecuación (108) la transformación (109), la cual establece una distribución de campos magnetostático (revisar sección 4.4) distintos a los propuestos por Rokaj en [2], de la siguiente manera:

$$A_z(x) = A_0 \ln \left(\frac{\psi_1(x)}{V} \right) \quad (109)$$

Donde A_0 (potencial magnetostático constante) y V son constantes que aseguran la dimensionalidad, y $\psi_1(x)$ una función arbitraria:

$$\frac{dA_z}{dx} = A_0 \frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)} \qquad \frac{d^2 A_z}{dx^2} = A_0 \frac{\psi_1''(x)}{\psi_1(x)} - A_0 \left(\frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)} \right)^2$$

Asumiendo un campo magnetostático que se comporta de la siguiente forma (ver figura 10):

$$B_y(x) \approx -\frac{dA_z}{dx} = -A_0 \frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)} \qquad (110) \qquad B^2 = B \cdot B = A_0^2 \left(\frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)} \right)^2$$

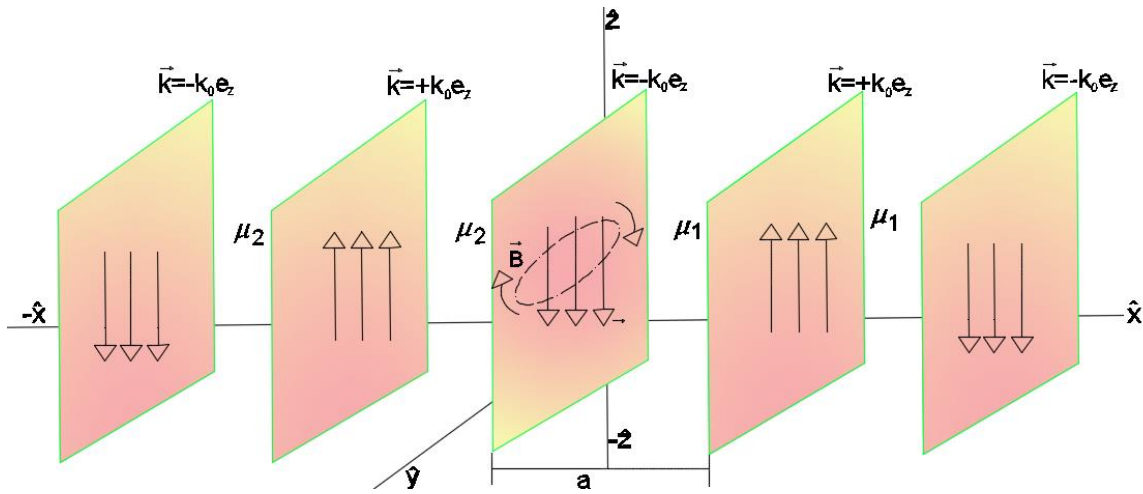


Figura 10. Configuración magnetostático con una corriente superficial $\vec{K} = \mp k \hat{z}$ [53], [54]. El material lineal, homogéneo, isotrópico, magnetizable entre las placas se comporta de forma similar a lo descrito en la figura 9.

$$A_0 \frac{\psi_1''(x)}{\psi_1(x)} - \frac{B^2}{A_0} + \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} B_y = -\mu(x) J_z(x) \qquad (111)$$

Relacionando la ecuación (110) con la ecuación (107) e introduciendo el término resultante en (111):

$$A_0 \frac{\psi_1''(x)}{\psi_1(x)} - \frac{B^2}{A_0} + \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} B_y = -\mu(x) \left(\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} B_y - \frac{1}{\mu(x)} \frac{dB_y}{dx} \right)$$

$$A_0 \frac{\psi_1''(x)}{\psi_1(x)} + \frac{dB_y}{dx} - \frac{B^2}{A_0} = 0$$

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + \frac{1}{A_0} \frac{dB_y}{dx} \psi_1(x) - \frac{B^2}{A_0^2} \psi_1(x) = 0 \quad (112)$$

Una breve salvedad es que la ecuación (112) no depende de la permeabilidad magnética.

Sumando y restando $B_y \frac{\psi_1'(x)}{A_0}$ en la misma se tiene:

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + \frac{1}{A_0} \frac{dB_y}{dx} \psi_1(x) - \frac{B^2}{A_0^2} \psi_1(x) + B_y \frac{\psi_1'(x)}{A_0} - B_y \frac{\psi_1'(x)}{A_0} = 0$$

En el límite, donde ϵ representará la energía de punto cero:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{dx} \left[\psi_1'(x) + B_y \frac{\psi_1(x)}{A_0} \right] - \frac{B^2}{A_0^2} \psi_1(x) - B_y \frac{\psi_1'(x)}{A_0} + \epsilon^2 \psi_1(x) \right\} = 0 \quad (113)$$

Donde ϵ es una constante auxiliar a determinar. Si se realiza la sustitución $\psi_1'(x) + B_y \frac{\psi_1(x)}{A_0} = \epsilon \psi_2(x)$ en la ecuación (113) se encuentran:

$$\epsilon \psi_2'(x) - \frac{B^2}{A_0^2} \psi_1(x) - B_y \frac{\psi_1'(x)}{A_0} + \epsilon^2 \psi_1(x) = 0 \quad (114)$$

$$\psi_2'(x) + \frac{B_y}{A_0} \psi_2(x) = \epsilon \psi_1(x) \quad (115)$$

Siendo (114) y (115) dos ecuaciones diferenciales acopladas que pueden reescribirse de forma semejante (matemáticamente) a la ecuación estacionaria unidimensional de Dirac (52), con unidades $\hbar = c = 1$, tal que:

$$\hat{H}_D \Psi(x) = \left[\sigma_y \hat{p} + \sigma_x \left(\frac{B_y(x)}{A_0} \right) \right] \Psi(x) = \epsilon \Psi(x) \quad (116)$$

4.4. FASE 4: Solución de ecuación tipo Dirac encontrada en 4.3

A continuación, se propone una solución a la ecuación (116), la cual se encuentra relacionada con la solución (52.2) debido a la existencia de un campo magnetostático $B_y(x)$ que produce un comportamiento homólogo al establecido por la función de Jackiw-Rebbi, en dicha solución (revisar sección 3.2.4). Es decir, se muestra como el estado de energía cero Jackiw-Rebbi se puede generar en la interfaz de dos materiales magnéticos,

separados por una placa infinita con una corriente superficial. Análogo a este caso, encontramos que el uso de placas cargadas infinitas para emular sistemas físicos se ha utilizado ampliamente para una variedad de aplicaciones, como un simple capacitor de placas paralelas [43] o en el estudio unidimensional del gas de Coulomb [55].

La ecuación (116) se puede simplificar en dos ecuaciones de tipo Schrödinger desacopladas $\hat{H}_i \Psi_i = 0$, para $i = 1, 2$.

$$\hat{H}_i \psi_i = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_i(x) \right) \psi_i(x) = 0$$

Donde,

$$U_{1,2}(x) = \left[- \left(\frac{B_y(x)}{A_0} \right)^2 + \epsilon^2 \pm \frac{1}{A_0} \frac{dB_y}{dx} \right]$$

De este modo, se observa que $\hat{H}_{1,2}$ son hamiltonianos supersimétricos que pueden ser factorizados como $\hat{H}_1 = \hat{A}^\dagger \hat{A} - \epsilon^2$ y $\hat{H}_2 = \hat{A} \hat{A}^\dagger - \epsilon^2$, donde $\hat{A} = \left(\partial_x + \frac{B_y(x)}{A_0} \right)$ y $\hat{A}^\dagger = \left(-\partial_x + \frac{B_y(x)}{A_0} \right)$ son análogos a los operadores escalera. De igual forma se construye el valor propio del modo de energía cero estableciendo $\epsilon = 0$ en la ecuación (116), y resolviendo las ecuaciones diferenciales de primer orden no acopladas para $\psi_{1,2}(x)$ (espinor constante de dos componentes):

$$\psi_{1,2}(x) = V_{1,2} \mathbf{exp} \left\{ \int \left(\frac{B_y(x)}{A_0} \right) dx \right\}_{1,2} \quad (117)$$

Asumiendo una configuración magnetostática descrita en la figura 10,

$$B_y(x) = \begin{cases} -\frac{\mu_2 k}{2} \hat{y}, & \text{para } x < 0 \\ \frac{\mu_1 k}{2} \hat{y}, & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (118)$$

El campo magnetostático dado por la ecuación (118) se obtiene por medio de un procedimiento igual al establecido en [apéndice C](#), teniendo como base la configuración de la figura 10. Este campo tiene curiosamente la misma forma del campo escalar externo

dado por la ecuación (52.1), el cual permite la existencia del estado propio de energía cero en el modelo Jackiw-Rebbi. El potencial vectorial magnetostático dado por el campo (118) se determina al resolver (110) en la siguiente forma:

$$A_z = - \int_0^x B_y(x) dx = \begin{cases} \frac{\mu_2 k}{2} x, & \text{para } x < 0 \\ -\frac{\mu_1 k}{2} x, & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (119)$$

Normalizando la función solución (117) e introduciendo (119) en ella,

$$|\psi_i(x)| = |V_{1,2}|^2 \int_0^\infty e^{\left(\frac{2\mu_{1,2}k}{2A_0}x\right)} dx = 1$$

$$|V_{1,2}|^2 \frac{A_0}{\mu_{1,2}k} \left\{ e^{\left(\frac{\mu_{1,2}k}{A_0}\infty\right)} - e^0 \right\} = 1$$

Para que la función anterior sea normalizable se debe cumplir que $V_2 = 0$, quedando que el valor de V_1 es:

$$|V_1| = \sqrt{\frac{(\mu_1 + \mu_2)k}{A_0}} \quad (120)$$

Reemplazando la constante de normalización (120) en (117) y agregando el potencial magnetostático (119), se obtiene una función propia para el modo cero de la ecuación de Dirac (116), dada por:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{(\mu_1 + \mu_2)k}{A_0}} \begin{pmatrix} e^{\frac{A_z}{A_0}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (121)$$

4.5. FASE 5: Sistematización de Resultados producto del proceso teórico

Mediante el proceso teórico realizado en las anteriores fases se desarrollará un análisis gráfico de las soluciones encontradas en cada medio material (homogéneo y no-homogéneo) empleado con la ayuda del software Wolfram Mathematica 10, además se compararán, con los casos particulares tratados en investigaciones anteriores [1], [2] y se establecerá cuando existen símiles con algunos sistemas cuánticos. Por otra parte, se

examinará la variación o los efectos producidos por la modificación de las constantes de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, respectivamente en cada caso.

4.6. FASE 6: Conclusiones

Con la información obtenida en el presente Trabajo de Grado se compararán los resultados obtenidos frente a los establecidos actualmente en la literatura, en cuanto al desarrollo de las transformaciones empleadas en diferentes medios; considerándolo como un resultado del estudio de las analogías entre la teoría electrostática, magnetostática, y la mecánica cuántica a partir del trabajo teórico desarrollado. Concluyéndose la versátil aplicabilidad de las transformaciones propuestas en diferentes casos.

5. Análisis y Discusión de Resultados

González [1] y Rokaj [2] plantean transformaciones que de ser aplicadas a la ecuación de Poisson en el espacio libre conducen a ecuaciones estacionarias tipo Schrödinger. En este trabajo se extiende el uso de estas transformaciones aplicándolas a la ecuación unidimensional de Poisson en la materia, con medios dieléctricos o magnetizables según el caso. Ahora serán puestas a prueba las funciones propias encontradas a través de un estudio extendido de las transformaciones de González y Rokaj, para modelar sistemas cuánticos análogos con configuraciones electrostáticas o magnetostáticas en la materia. Esta sección se divide en dos subsecciones; primeramente, se muestran los resultados obtenidos al graficar las funciones propias producto de las ecuaciones tipo Schrödinger encontradas al desarrollar el estudio extendido en medios materiales homogéneos, para diferentes valores de constantes eléctricas y magnéticas. Donde se comparan las gráficas obtenidas con las registradas por González y Rokaj para un medio como el espacio libre. En segundo y último lugar, se presentan los resultados encontrados al desarrollar la extensión del estudio en medios unidimensionales magnetizables no-homogéneos, comparando la gráfica obtenida a partir de la solución propia (121) con la del modelo de Rackiw-Rebbi para el valor propio de energía del punto cero, establecida en la figura 6.

5.1. Simulación de las soluciones propias en materiales homogéneos

Para poner a prueba el desarrollo del estudio extensivo se simularon las soluciones propias encontradas (91) y (105) para diferentes valores de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, con el fin de determinar en qué materiales se obtendrá un mejor comportamiento del sistema cuántico, es decir que materiales reproducirían una mejor simulación de un sistema cuántico.

5.1.1. Medios Dieléctricos

La función propia (91) que modela una distribución de campos electrostáticos uniformes en la materia, es simulada inicialmente para el Nitrógeno, el cual es un dieléctrico lineal real con una constante de permitividad eléctrica relativa $\epsilon_r = 1.000548$. Para efectos de

simplificación se toman unidades $\hbar = m = a = 1$; $V_0 = a_0^3 = \sigma = 1$; $\alpha_1 = 1/2$ a la hora de correr la simulación, la cual dependerá exclusivamente del número N de placas paralelas y de la permitividad relativa del dieléctrico presente entre las placas, figura 11.

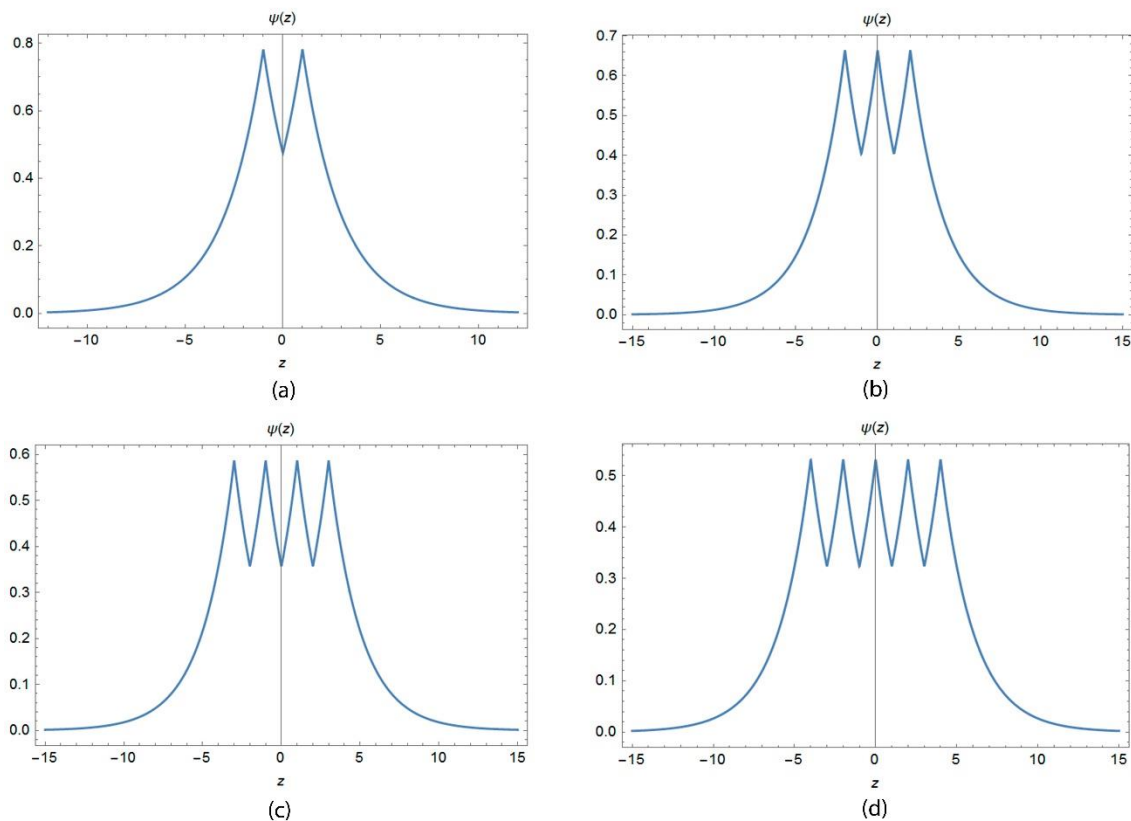


Figura 11. La función propia (91) para distintos valores de N : (a) $N=1$, (b) $N=2$, (c) $N=3$, (d) $N=4$ en función de z .

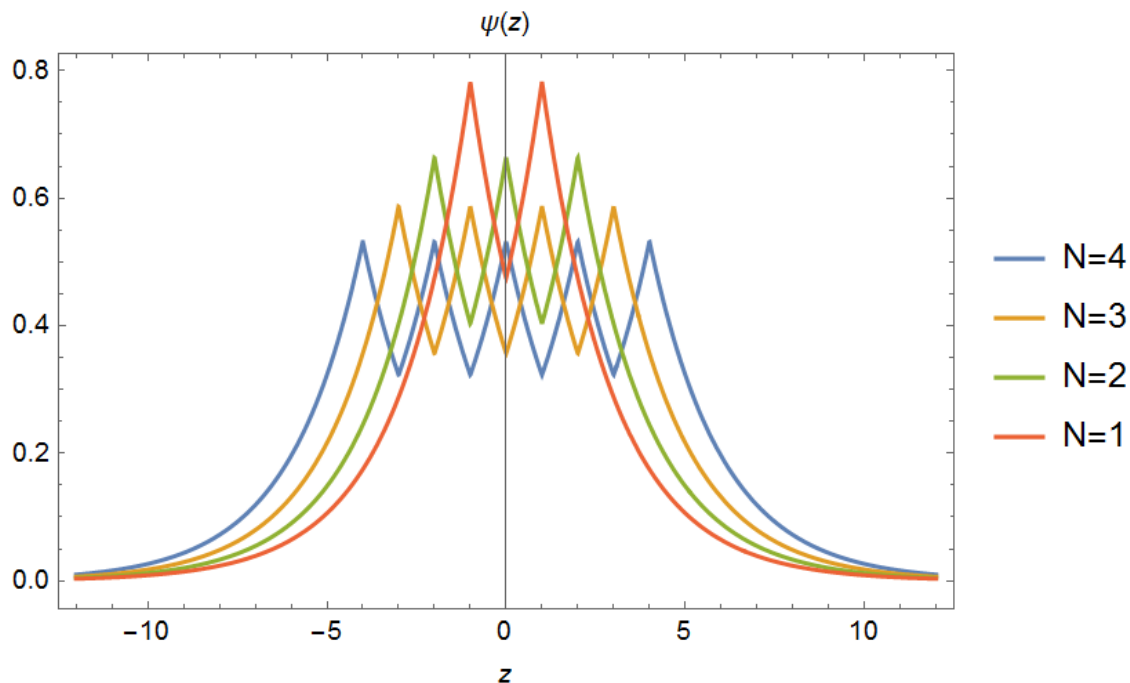


Figura 12. Gráficas de la función propia (91) en una sola representación para $\epsilon_r = 1.000548$ con diferentes valores de N .

En la figura 11 se encuentra que las gráficas obtenidas para el material Nitrógeno presentan un comportamiento descriptivo de un potencial triangular, o en este caso de una barrera de pozos de potencial delta Dirac similar al presente en los cristales iónicos unidimensionales [52]. Se observa particularmente que existe un máximo más pronunciado en la función propia cuando existe solo una placa conductora, efecto que puede estar asociado con el valor esperado de la función de energía potencial obtenido para el sistema en la ecuación (93). Este hecho se aprecia mejor en la figura 12.

A continuación, se emplean diferentes medios dieléctricos en donde las constantes de permitividad eléctrica relativa presentan una diferencia notable, en comparación con la presentada por el Nitrógeno; esto con el fin de analizar el comportamiento de la función propia (91). Los materiales empleados se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Constantes Dieléctricas

Material	Permitividad eléctrica relativa
Nitrógeno	1.000548
Benceno	2.280000
Sal	5.900000
Silicona	11.700000

Nota: (a menos que se especifique lo contrario, los valores dados para 1 atm, 20°C). Datos de Handbook of Chemistry and Physics, 91st ed. (Boca Raton: CRC Press, 2010) [43].

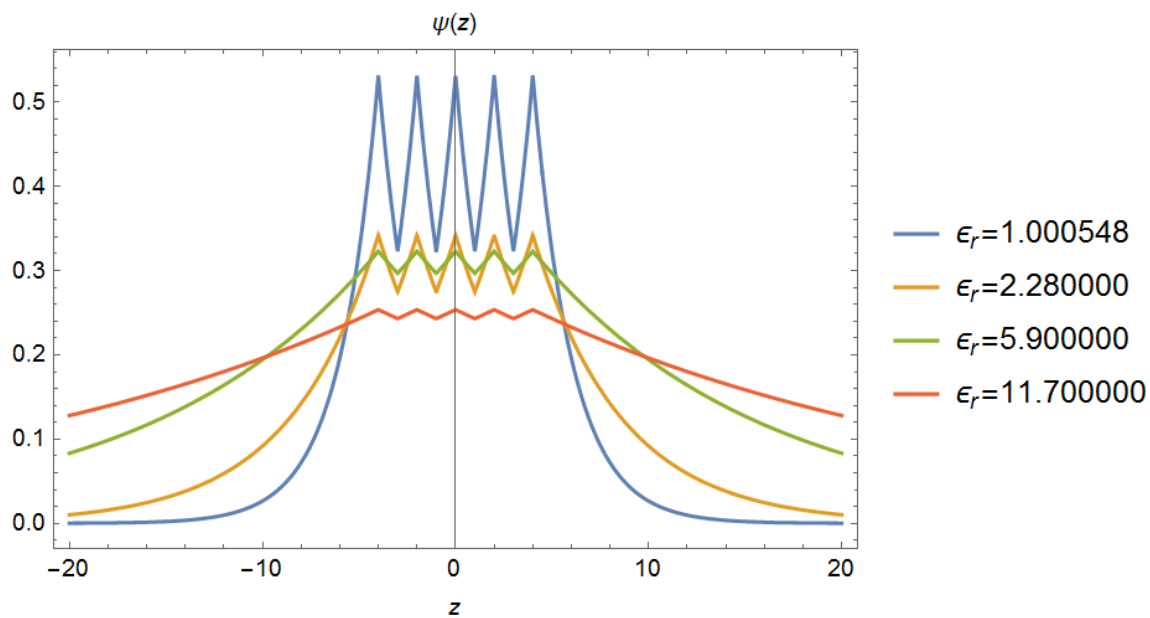


Figura 13. Configuraciones de las funciones propias (91) para los diferentes materiales presentes en la tabla 1 en función de z , con $N=4$.

En la figura 13 se destaca que al aumentar la permitividad eléctrica relativa del material la función propia se extiende más suavemente, es más lentamente variable, lo cual modifica la posibilidad de atrapar un electrón en un cristal iónico unidimensional. Este aspecto del comportamiento de la función propia es un resultado muy importante que se deriva de nuestro análisis, y es provocado en este caso por la modificación del material presente entre las placas conductoras paralelas, pero es análogo la variación de permitividad eléctrica que presentan los cristales iónicos unidimensionales con la frecuencia del campo eléctrico aplicado [56].

Se simula nuevamente en la figura 14 la función (91) con una constante dieléctrica igual a la presentada por el espacio libre, esto con el fin de comparar el comportamiento descrito por nuestra función propia con el descrito por la función propia (I) de González en su trabajo [1], el cual es mostrado en la figura 1. Para nuestra sorpresa el comportamiento de las funciones propias difiere en gran medida para cada valor de N , y curiosamente publicaciones posteriores de González y Rokaj [2], [20] indican correcciones a la función solución propia establecida inicialmente por dicho autor en el espacio libre; sin embargo, estas correcciones no muestran graficas pertinentes ni corrigen del todo la función solución propia, puesto que difieren de la función solución propia encontrada en este trabajo en un término constante, como se observa al comparar dichas soluciones.

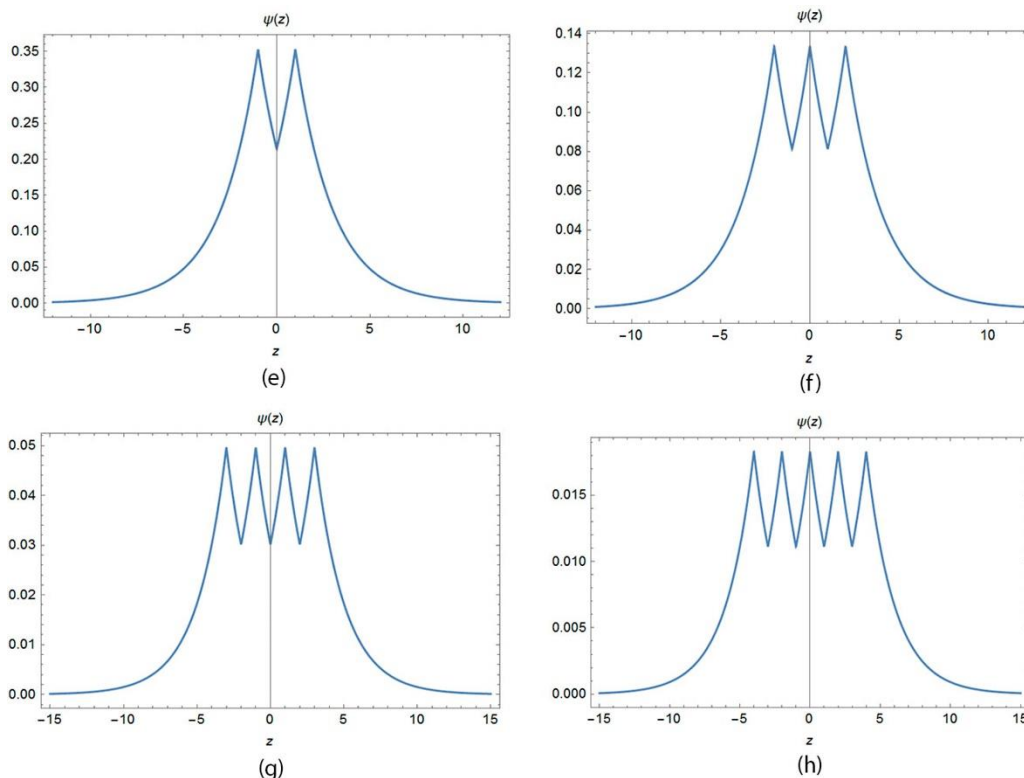


Figura 14. La función propia (91) para distintos valores de N : (e) $N=1$, (f) $N=2$, (g) $N=3$, (h) $N=4$ en función de z , cuando la permitividad eléctrica relativa es igual a la del espacio libre $\epsilon_r \approx 1$.

5.1.2. Medios Magnetizables

La función propia (105) que modela una distribución de campos magnetostáticos uniformes en la materia, es simulada inicialmente para materiales como el Gadolinium (Gd) debido a que a pesar de su alta magnetización sigue siendo lineal, con una constante de permeabilidad magnética relativa $\mu_r = 1.48$. De manera semejante al caso anterior, a la hora de correr la simulación se toman unidades $\hbar = m = a = 1$; $A_0 = b_0^3 = k = 1$; $\alpha_2 = 1/2$, para que así la función propia dependa exclusivamente del número de placas paralelas N y de la permeabilidad relativa del material Gd entre las placas, figura 15.

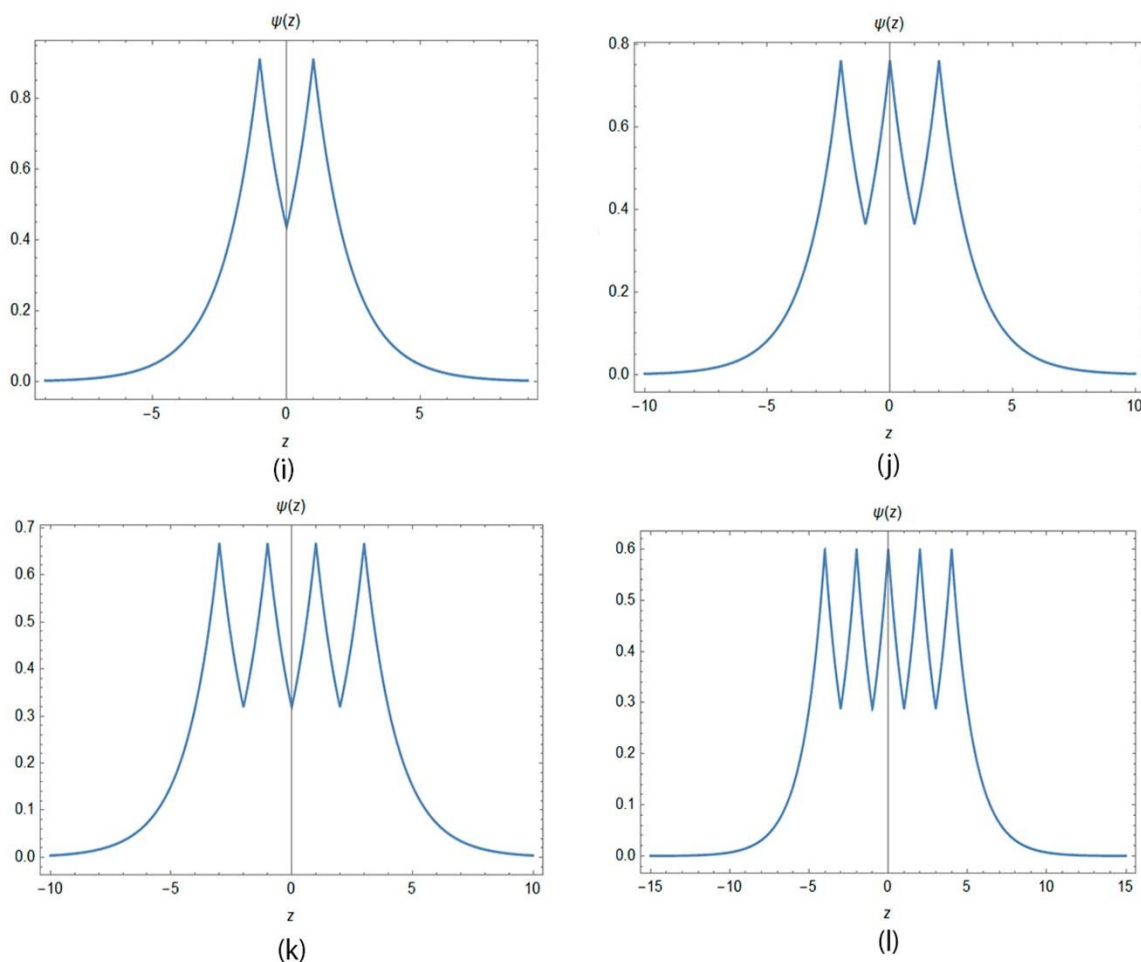


Figura 15. La función propia (105) para el Gd con distintos valores de N : (i) $N=1$, (j) $N=2$, (k) $N=3$, (l) $N=4$ en función de z .

A diferencia del caso dieléctrico (Figura 11) aquí se observa como el Gd refuerza el campo magnetostático en la figura 15, provocando que la función solución propia adquiera valores más altos para distintas cantidades de placas paralelas establecidas; una comparación más detallada entre las gráficas se ve en la figura 16, en la cual curiosamente se observa que con la configuración de una o dos placas se alcanza el valor más alto en la función solución propia, describiendo un comportamiento influenciado por la energía potencial (104), análogo al de un cristal iónico unidimensional. Este hecho posiblemente se encuentre relacionado con las propiedades magnéticas de los materiales paramagnéticos, diamagnéticos, o superparamagnéticos [57].

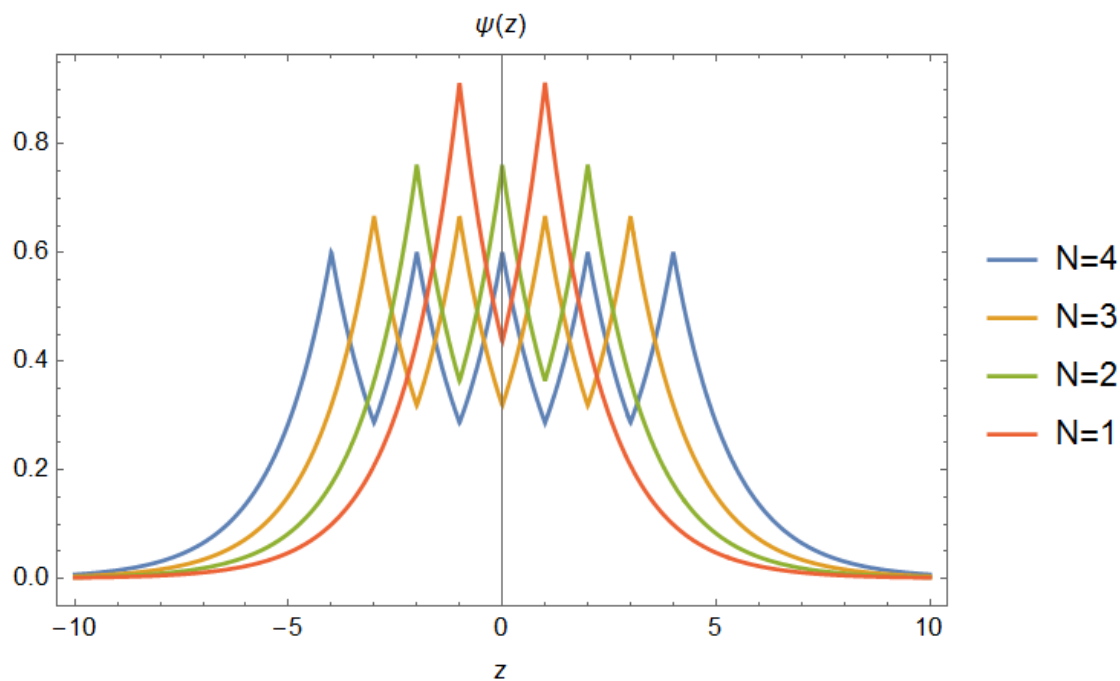


Figura 16. Gráficas de la función propia (105) en una sola representación para el Gd con los diferentes valores de N .

En consecuencia, el Gd al ser un elemento del grupo de los lantánidos (grupo de elementos que forman parte del periodo 6 de la tabla periódica de los elementos, o de “tierras raras”) presenta un momento magnético bastante grande, ya que puede transportar hasta 7 electrones no apareados, debido a este suceso, cuando el campo magnético de las placas es aplicado sobre el Gd los momentos dipolares en él son alineados con el campo magnético externo, produciendo un efecto de refuerzo en \vec{B} ; este fenómeno es conocido como paramagnetismo [57]. Caso contrario es el diamagnetismo donde los momentos dipolares presentes en el material se ordenan de forma contraria al campo magnético aplicado, produciendo que sea repelido, es decir se genera una disminución de \vec{B} ; dicho suceso es apreciable en la figura 17, ya que se emplea para este caso en particular una constante de permeabilidad relativa del material entre las placas paralelas con $\mu_r < 1$, como el Bismuto $\mu_r = 0.99983$.

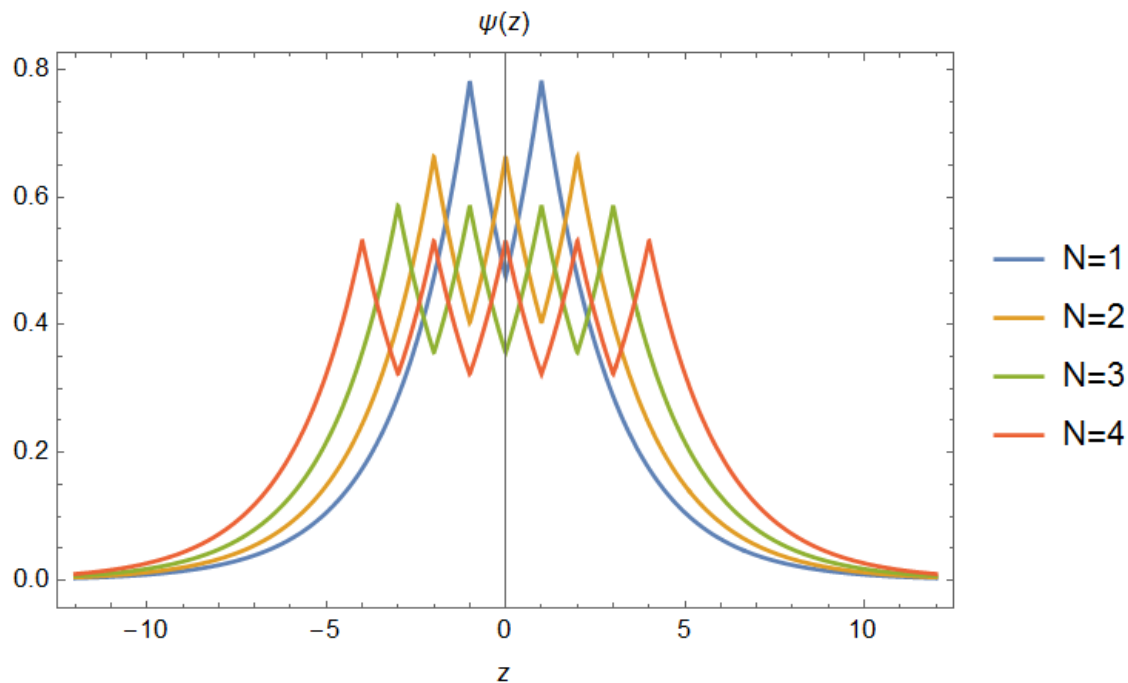


Figura 17. La función propia (105) para diferentes valores de N , con $\mu_r=0.99983$.

Al comparar las figuras 16 y 17 surge la duda de si el valor esperado de la función propia de energía potencial es totalmente independiente de $N > 1$, debido a que en materiales diamagnéticos la figura 17 parece concordar con la idea expuesta en la ecuación (106), sin embargo, caso contrario son los materiales paramagnéticos, ya que de acuerdo con la figura 16 la configuración $N=2$ también debería contribuir en (106). En vista de este acontecimiento se simula nuevamente la función solución propia (105) para valores de permitividad magnética relativa $\mu_r \geq 1$, asociados en el mejor de los casos con materiales superparamagnéticos (revisar apéndice E), con un número de placas paralelas $N=4$, y con la finalidad de observar en la figura 18 los valores más altos que se registren. En comparación con la figura 16, este nuevo resultado muestra que si el material empleado entre las placas paralelas tiene una fuerte magnetización $\mu_r \geq 1.48$, mayores serán los valores registrados por la función solución propia (105), decreciendo esta relación con un número cada vez más grande de N .

Es necesario aclarar que las constantes de permeabilidad magnética de los materiales empleados (Gadolinium y Bismuto) en esta sección fueron tomados de una de las tablas de materiales en [43].

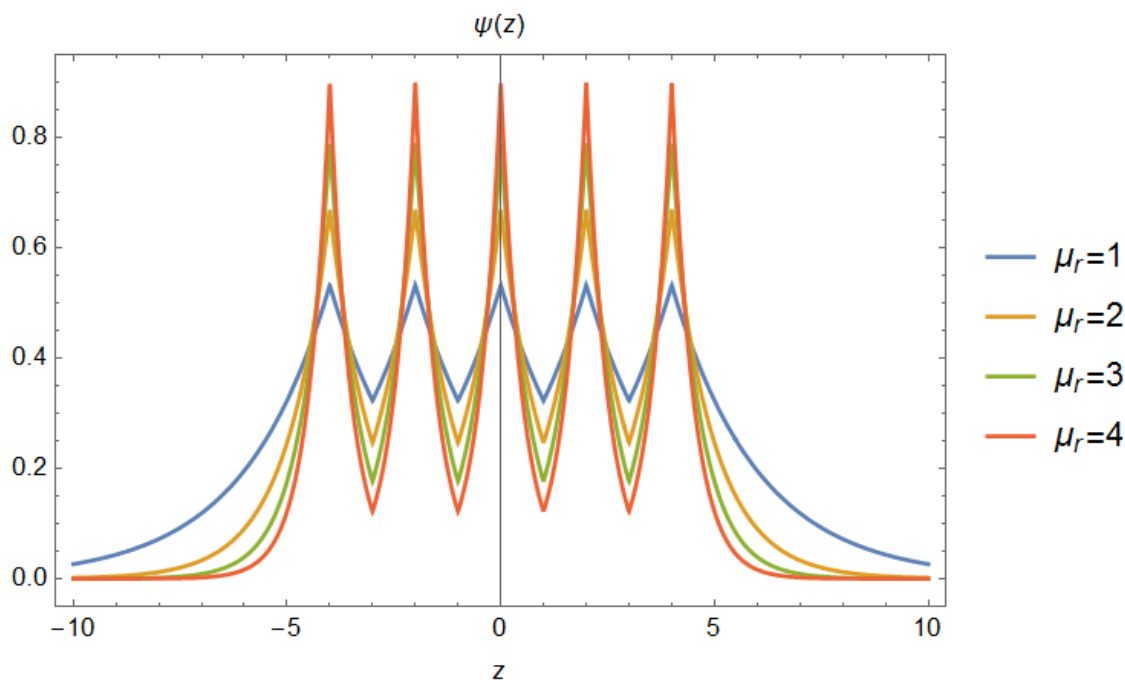


Figura 18. Muestra la función propia (105) para valores arbitrarios $\mu_r \geq 1$ en función de z , con $N=4$.

5.2. Simulación de la solución propia en medios magnetizables no-homogéneos

Para comprobar si la función solución propia (121) modela una función propia para el estado propio de energía cero del modelo Jackiw-Rebbi; primeramente, se simula (121) para diferentes valores de permeabilidad magnética, empezando por valores cercanos a los característicos en materiales superparamagneticos, y posteriormente del orden de los ferromagnéticos (revisar apéndice E). Al simular la función solución propia en la figura 19 se toman algunos parámetros constantes $A_0 = 3; k = 1$, en la figura 20 se toman como parámetros constantes $A_0 = 2000; k = 1$, donde el potencial magnetostático debe ser $A_0 \geq 3$ y $A_0 \geq 2000$ para que los valores adquiridos en cada figura por la función solución propia (121) concuerden con la normalización.

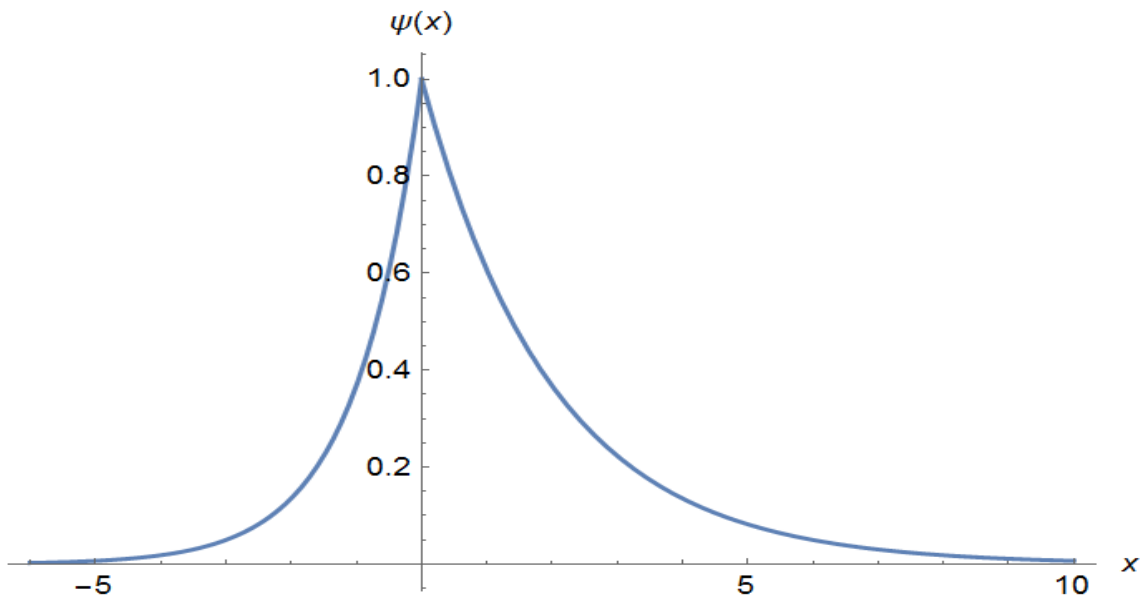


Figura 19. La función propia (121) para un medio no-homogéneo unidimensional con constantes $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = 2$ [57].

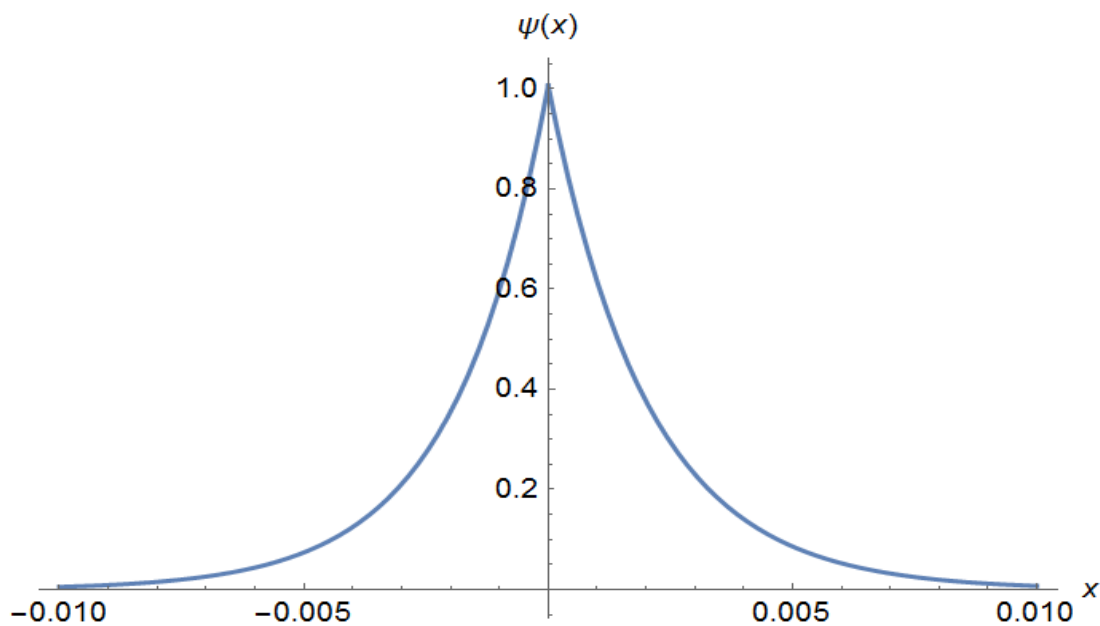


Figura 20. La función propia (121) para un medio no-homogéneo unidimensional con constantes $\mu_1 = 983$ y $\mu_2 = 1043$ [58].

Efectivamente en ambas figuras (19 y 20) se observa que la función propia (121) se localiza alrededor del cero en el eje x , del mismo modo que la función de onda propia del estado propio de energía cero del modelo de Jackiw-Rebbi en la figura 6. Ahora, indiscutiblemente la figura 20 presenta una mayor semejanza con la figura 6; no obstante, tiene intensidades mayores debido a que el campo magnetostático es reforzado por la fuerte magnetización del medio empleado entre las placas. Caso contrario es la figura 19 donde el material empleado no presenta una magnetización tan grande, debido a esto se obtienen curvas de comportamiento tan características en cada medio empleado. Es notable observar que entre más se acerquen las constantes de permeabilidad magnética relativa, es decir $\mu_1 \approx \mu_2$ mayor será la semejanza con el modelo de Jackiw-Rebbi en la figura 6

Con respecto a la variación de la permeabilidad magnética relativa de un material, es imperante aclarar que debido a su estructura atómica los materiales presentan diferentes susceptibilidades magnéticas. Si indagamos más al respecto encontramos que en absolutamente todos los materiales la permeabilidad magnética relativa varía con la temperatura [58]; siendo de interés la temperatura de Curie y la temperatura de Néel (revisar apéndice E). Sin embargo, esta teoría se encuentra fuera del alcance del presente Trabajo de Grado, por ende, no se tratan casos donde la permeabilidad magnética relativa varíe con la temperatura; aunque posiblemente se indague sobre este tema en el futuro.

6. Conclusiones

En este Trabajo de Grado se propuso una extensión al estudio planteado por González [1] y Rokaj [2] para determinar el comportamiento de las funciones propias solución encontradas en los diferentes medios materiales empleados, dieléctricos y magnéticos, una vez se aplicaron las transformaciones (54, 55 y 109) a la ecuación unidimensional de Poisson en medios materiales (homogéneos y no-homogéneos). El presente estudio extensivo ha sido desarrollado mediante un proceso analítico; siendo finalmente simuladas las diferentes soluciones propias establecidas mediante este proceso en Wolfram Mathematica para complemento del mismo, donde además se toman en cuenta las constantes de permeabilidad magnética y permitividad eléctrica de los diferentes medios. A diferencia del estudio planteado por González y Rokaj para configuraciones de campos electrostáticos y magnetostático en el espacio libre, el cual no depende de estas constantes. Esto constituye una ventaja para nuestro estudio ya que puede aplicarse en diferentes medios materiales con distintas permeabilidades magnéticas o permitividades eléctricas, tales que la función solución propia presente un símil cuántico.

El estudio extensivo propuesto fue puesto a prueba usando diferentes constantes de permeabilidad magnética y permitividad eléctrica en las soluciones propias (91, 105 y 121) simulando el comportamiento de medios materiales reales en una dimensión con una configuración de placas paralelas de por medio. A partir de estas simulaciones se compararon los estudios de González y Rokaj con el estudio extensivo propuesto en este trabajo. El estudio realizado en este Trabajo de Grado es más general que el elaborado por los autores González y Rokaj en [1] y [2], debido a que ellos hicieron sus indagaciones usando el espacio libre como medio material (cuando $\epsilon_r = 1$ y $\mu_r = 1$). Bajo estas premisas nuestra elaboración conlleva a la posibilidad de hacer más predicciones respecto al comportamiento de los materiales, en especial modelamos la función de onda propia para una partícula cuántica que atraviesa un cristal iónico unidimensional de manera exacta, siempre y cuando su medio sea homogéneo; no obstante, al emplear un medio no-homogéneo se demostró que la ecuación unidimensional de Poisson se puede utilizar para

simular el modelo de Jackiw-Rebbi en una dimensión para el estado propio de energía cero. Como característica de este hallazgo también se concluye que el potencial magnetostática debe ser en magnitud proporcional a la suma de las constantes de permeabilidad magnética relativa de los medios que se empleen.

En el estudio extensivo presentado se demuestra que la función solución propia (91) a grandes valores de permitividad eléctrica ($1.000548 \ll \epsilon_r$) deja de modelar un sistema cuántico. A diferencia de la función solución (105) que a mayor permeabilidad magnética ($1.48 \ll \mu_r$) adquiere mucha más similitud con un sistema cuántico, sin embargo, es preciso dejar claro que estos comportamientos son propios de materiales homogéneos y en casos particulares de materiales no-homogéneos.

A la luz del presente trabajo se concluye que el estudio realizado con base en la investigación [1] y [2] para determinar la versatilidad de las transformaciones sobre la ecuación unidimensional de Poisson, en diferentes medios materiales homogéneos y no-homogéneos, ha demostrado su efectividad estableciendo un rango de permeabilidades magnéticas y permitividades eléctricas para las cuales es posible una analogía entre la teoría electromagnética y la mecánica cuántica. Es importante recalcar que con el fin de dar explicación a fenómenos como el paramagnetismo o ferromagnetismo se hace necesaria la teoría cuántica; por consiguiente, el estudio de analogías entre la teoría clásica y la teoría cuántica conlleva a un mejor entendimiento de estos fenómenos. Para finalizar, con la base de los hallazgos encontrados este trabajo se ha introducido una plataforma magnetostática para replicar el estado propio de energía cero del modelo de Jackiw-Rebbi, permitiendo de este modo una prueba de laboratorio.

7. Apéndices

Apéndice A: Cálculo del campo electrostático producido por una placa infinita cargada en presencia de un material

Siendo el campo electrostático regido por:

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon R^2} \hat{e}_R \quad (\text{A1})$$

La carga albergada en la superficie de la placa:

$$Q = \int \sigma d\vec{s} \quad (\text{A2})$$

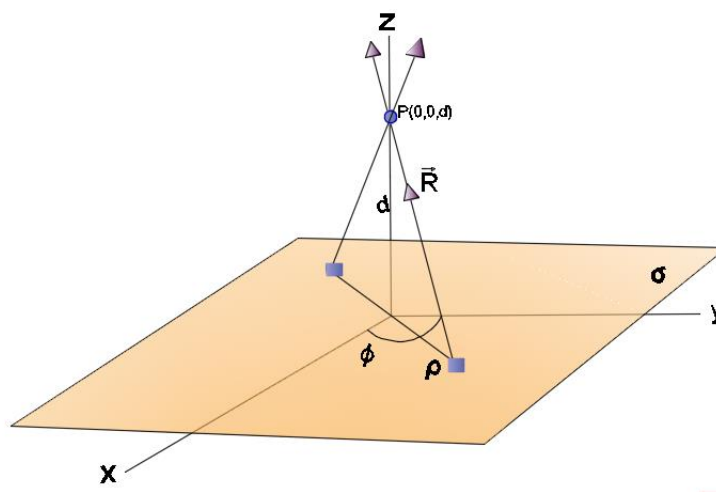


Figura 21. Campo eléctrico debido a una placa infinita con densidad de carga superficial.

Estimando los vectores en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{R} = \rho(-\hat{e}_\rho) + d\hat{e}_z \quad |\vec{R}| = |\rho^2 + d^2|^{\frac{1}{2}}$$

$$\hat{e}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

Reemplazando (A2),

$$dQ = \sigma d\vec{s} = \sigma \rho d\phi d\rho$$

Se reescribe (A1) de manera que:

$$\vec{E} = \iint_0^{2\pi, \infty} \frac{\sigma \rho [\rho(-\hat{e}_\rho) + d\hat{e}_z] d\phi d\rho}{4\pi\epsilon |\rho^2 + d^2|^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E} = \iint_0^{2\pi, \infty} \frac{\sigma \rho [-\rho] d\phi d\rho}{4\pi\epsilon |\rho^2 + d^2|^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_\rho + \iint_0^{2\pi, \infty} \frac{\sigma \rho [d] d\phi d\rho}{4\pi\epsilon |\rho^2 + d^2|^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_z$$

En la primera integral el vector unitario se puede reemplazar por $\hat{e}_\rho = \cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y$, debido a esto la integral resultante dará cero. Por consiguiente,

$$\vec{E} = \frac{\sigma d}{4\pi\epsilon} 2\pi \int_0^\infty |\rho^2 + d^2|^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2} d(\rho^2) \hat{e}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma d}{2\epsilon} \left\{ -|\rho^2 + d^2|^{-\frac{1}{2}} \right\}_0^\infty \hat{e}_z$$

Una vez evaluado estos límites se obtiene el campo electrostático para este caso,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon} \hat{e}_z \quad (\text{A3})$$

Apéndice B: Desarrollo matemático de la integral (88)

$$\int_0^\infty e^{f(z)} dz = \int_0^{\text{Na}} e^{f(z)} dz + \int_{\text{Na}}^\infty e^{f(z)} dz$$

Siendo:

$$f(z) = \frac{-1}{l\epsilon_r} \left\{ \sum_{n=0}^N (-1)^n |z + na| + \sum_{n=1}^N (-1)^n |z - na| \right\}$$

Para $\text{Na} < z < \infty$ el factor $f(z)$ se reduce a,

$$f(z) = \frac{-1}{l\epsilon_r} \left(z + \sum_{n=1}^N (-1)^n 2z \right) \quad (\text{B1})$$

Resolviendo la segunda integral de (88) con el factor (B1)

$$\int_{Na}^{\infty} e^{f(z)} dz = \int_{Na}^{\infty} e^{\frac{-1}{l\epsilon_r}(z + \sum_{n=1}^N (-1)^n 2z)} dz$$

Expandiendo $\sum_{n=1}^N (-1)^n 2z = (-1 + (-1)^N)z$

$$\int_{Na}^{\infty} e^{f(z)} dz = \int_{Na}^{\infty} e^{\frac{-1}{l\epsilon_r}(-1)^N z} dz = l\epsilon_r (-1)^N e^{\frac{-1}{l\epsilon_r}(-1)^N z} \Big|_{Na}^{\infty}$$

Esta integral divergirá a menos que $l = l(-1)^N$, $l^{-1} = l^{-1}(-1)^N$

$$\int_{Na}^{\infty} e^{f(z)} dz = l\epsilon_r e^{\frac{-Na}{l\epsilon_r}} \quad (B2)$$

Ahora para el límite $ka < z < (k+1)a$ el factor $f(z)$ se reduce a,

$$f(z) = \frac{-1}{l\epsilon_r} \left((-1)^k z + \sum_{n=k+1}^N (-1)^n 2na \right) \quad (B3)$$

Introduciendo (B3) en (88) para resolver la primera integral:

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{ka}^{(k+1)a} e^{\frac{-1}{l\epsilon_r}((-1)^k z + \sum_{n=k+1}^N (-1)^n 2na)} dz$$

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = - \left[l\epsilon_r \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k e^{\frac{-1}{l\epsilon_r} \sum_{n=k+1}^N (-1)^n 2na} e^{\frac{-(-1)^k z}{l\epsilon_r}} \right] \Big|_{ka}^{(k+1)a}$$

Límite superior $(k+1)a$ y límite inferior ka

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = l\epsilon_r \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k e^{\frac{-1}{l\epsilon_r} \sum_{n=k+1}^N (-1)^n 2na} e^{\frac{-(-1)^k ka}{l\epsilon_r}} \left[1 - e^{\frac{-(-1)^k a}{l\epsilon_r}} \right]$$

Expandiendo la exponencial,

$$e^{\frac{-1}{l\epsilon_r} \sum_{n=k+1}^N (-1)^n 2na} = e^{\frac{1}{l\epsilon_r} \left\{ \frac{1}{2} a ((-1)^k + (-1)^{1+N} + 2(-1)^k k - 2(-1)^N N \right\}}$$

La expresión cambia a,

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = l\epsilon_r \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k e^{\frac{1}{l\epsilon_r} \left\{ \frac{1}{2} a((-1)^k + (-1)^{1+N+2(-1)^k k - 2(-1)^N N} \right\}} e^{\frac{-(-1)^k k a}{l\epsilon_r}} \left[1 - e^{\frac{-(-1)^k a}{l\epsilon_r}} \right]$$

Simplificando términos,

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = l\epsilon_r \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k e^{\frac{1}{l\epsilon_r} \left\{ \frac{a}{2} (-1)^k - \frac{a}{2} (-1)^{N-a(-1)^N N} \right\}} \left[1 - e^{\frac{-(-1)^k a}{l\epsilon_r}} \right]$$

Teniendo en cuenta que: $2 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) = e^{\frac{x}{2}}(1 - e^{-x})$

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = 2l\epsilon_r \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k e^{\frac{-a(-1)^N(1+2N)}{l\epsilon_r}} \sinh\left(\frac{(-1)^k a}{2l\epsilon_r}\right)$$

Pero

$$\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \sinh\left(\frac{(-1)^k a}{2l\epsilon_r}\right) = N \sinh\left(\frac{a}{2l\epsilon_r}\right)$$

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = 2l\epsilon_r N e^{\frac{-(-1)^N(1+2N)a}{2l\epsilon_r}} \sinh\left(\frac{a}{2l\epsilon_r}\right)$$

Recordando que $l = l(-1)^N$, $l^{-1} = l^{-1}(-1)^N$

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = 2l\epsilon_r N e^{\frac{-(1+2N)a}{2l\epsilon_r}} \sinh\left(\frac{a}{2l\epsilon_r}\right) \quad (B4)$$

Resueltas las integrales de (88) se tiene que:

$$\int_0^{\infty} e^{f(z)} dz = l\epsilon_r e^{\frac{-Na}{l\epsilon_r}} + 2l\epsilon_r N e^{\frac{-(1+2N)a}{2l\epsilon_r}} \sinh\left(\frac{a}{2l\epsilon_r}\right) \quad (B5)$$

Apéndice C: Cálculo del campo magnetostático producido por una placa infinita de corriente en presencia de un material

Una placa infinita de corriente en el plano $z = 0$, con una corriente superficial $\vec{K} = k\hat{e}_x$ como se muestra en la siguiente figura 22,

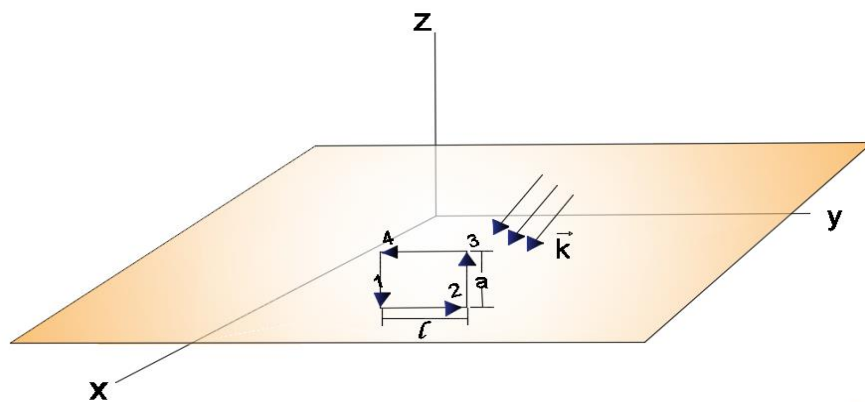


Figura 22. Placa infinita con una densidad de corriente superficial.

Con el fin de obtener el campo magnetostático se aplica la ley circuital de Ampere a la trayectoria rectangular cerrada (trayectoria amperiana) de forma que:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I_{enc} = \mu k \hat{e}_x \quad (C1)$$

Con el fin de evaluar esta integral, es preciso suponer que la placa infinita se compone de filamentos; como se evidencia en la figura 23, donde el $d\vec{B}$ arriba o debajo de la placa es producto de estas corrientes filamentosas, y por ende el $d\vec{B}$ resultante solo posee la componente \hat{e}_x . A causa de la infinita extensión de la placa, ésta puede concebirse compuesta por tales pares filamentosos, de manera que:

$$\vec{B} = \begin{cases} B_0 \hat{e}_y & \text{para } z < 0 \\ -B_0 \hat{e}_y & \text{para } z > 0 \end{cases} \quad (C2)$$

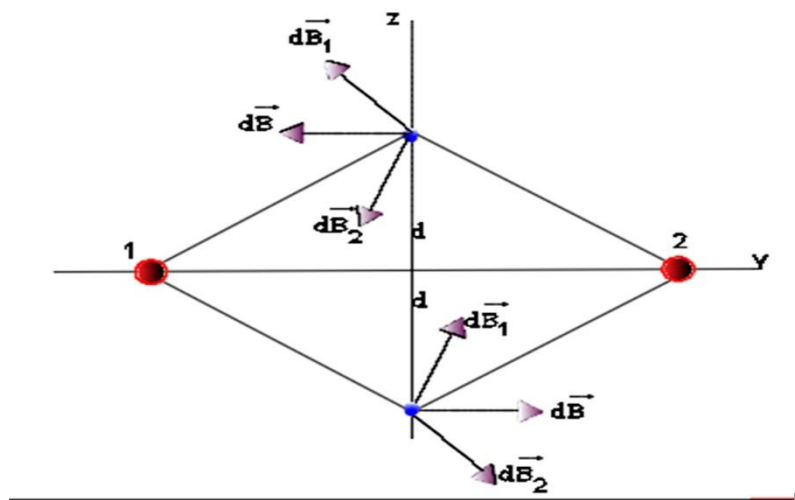


Figura 23. Par simétrico de filamentos de corriente con corriente a lo largo de \hat{e}_x .

Siendo B_0 el campo por determinar. La integral de línea en (C1) evaluada a lo largo de la trayectoria en la figura 24 da como resultado:

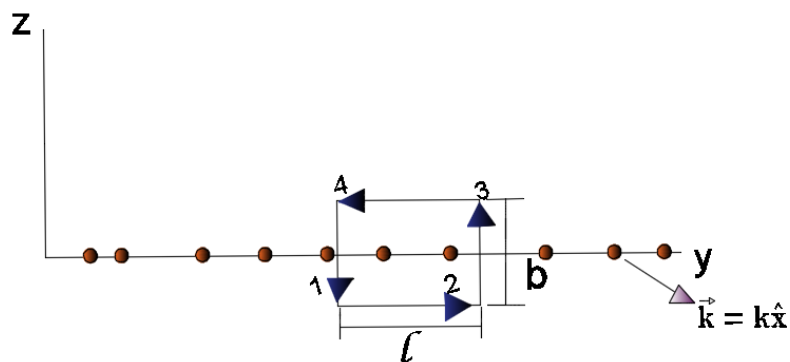


Figura 24. Vista lateral de la figura 22.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left(\int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{l} \right)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0(-b) + (-B_0)(-l) + 0(b) + B_0(l)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2B_0l$$

$$2B_0l = \mu k$$

$$B_0 = \frac{\mu k}{2} \hat{e}_x \quad (C3)$$

De forma vectorial, al sustituir (C3) en (C2):

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu k_x}{2} \hat{e}_y & \text{para } z < 0 \\ -\frac{\mu k_x}{2} \hat{e}_y & \text{para } z > 0 \end{cases}$$

Apéndice D: Derivación de la normalización en la función solución propia (102)

Normalizando la función propia (102) para encontrar la constante C:

$$\int_0^{\infty} |\Psi(z)|^2 dz = 1$$

$$|C|^2 \int_0^{\infty} \exp\left\{\frac{-\mu_r}{L} \sum_{n=-N}^N (-1)^n |z - na|\right\} dz = 1 \quad (D1)$$

Empleando,

$$\sum_{n=-N}^N (-1)^n |z - na| = \sum_{n=-N}^0 (-1)^n |z - na| + \sum_{n=1}^N (-1)^n |z - na|$$

Cambiando n por $-n$ en la primera suma de la derecha:

$$\sum_{n=-N}^N (-1)^n |z - na| = \sum_{-n=-N}^0 (-1)^{-n} |z + na| + \sum_{n=1}^N (-1)^n |z - na|$$

$$\sum_{n=-N}^N (-1)^n |z - na| = \sum_{n=0}^N (-1)^n |z + na| + \sum_{n=1}^N (-1)^n |z - na| \quad (D2)$$

Reemplazando (D2) en (D1) la integral por resolver es:

$$\int_0^{Na} \exp \left[\frac{-\mu_r}{L} \left\{ \sum_{n=0}^N (-1)^n |z + na| + \sum_{n=1}^N (-1)^n |z - na| \right\} \right] dz + \int_{Na}^{\infty} \exp \left[\frac{-\mu_r}{L} \left\{ \sum_{n=0}^N (-1)^n |z + na| + \sum_{n=1}^N (-1)^n |z - na| \right\} \right] dz \quad (D3)$$

De manera que,

$$\int_0^{\infty} e^{f(z)} dz = \int_0^{Na} e^{f(z)} dz + \int_{Na}^{\infty} e^{f(z)} dz$$

Siendo:

$$f(z) = \frac{-\mu_r}{L} \left\{ \sum_{n=0}^N (-1)^n |z + na| + \sum_{n=1}^N (-1)^n |z - na| \right\}$$

Para $Na < z < \infty$ el factor $f(z)$ se reduce a

$$f(z) = \frac{-\mu_r}{L} \left(z + \sum_{n=1}^N (-1)^n 2z \right) \quad (D4)$$

Resolviendo la segunda integral de (D3) con el factor (D4)

$$\int_{Na}^{\infty} e^{f(z)} dz = \int_{Na}^{\infty} e^{\frac{-\mu_r}{L} (z + \sum_{n=1}^N (-1)^n 2z)} dz$$

Expandiendo $\sum_{n=1}^N (-1)^n 2z = (-1 + (-1)^N)z$

$$\int_{Na}^{\infty} e^{f(z)} dz = \int_{Na}^{\infty} e^{\frac{-\mu_r}{L} (-1)^N z} dz = \frac{L}{\mu_r} (-1)^N e^{\frac{-\mu_r}{L} (-1)^N z} \Big|_{Na}^{\infty}$$

Esta integral divergirá a menos que $L = L (-1)^N$, $L^{-1} = L^{-1} (-1)^N$

$$\int_{Na}^{\infty} e^{f(z)} dz = \frac{L}{\mu_r} e^{\frac{-N\mu_r a}{L}} \quad (D5)$$

Ahora para el limite $ka < z < (k+1)a$ el factor $f(z)$ se reduce a,

$$f(z) = \frac{-\mu_r}{L} \left((-1)^k z + \sum_{n=k+1}^N (-1)^n 2na \right) \quad (D6)$$

Introduciendo (D6) en (D3) para resolver la primera integral,

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{ka}^{(k+1)a} e^{\frac{-\mu_r}{L}((-1)^k z + \sum_{n=k+1}^N (-1)^n 2na)} dz$$

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = -\frac{L}{\mu_r} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k e^{\frac{-\mu_r}{L} \sum_{n=k+1}^N (-1)^n 2na} e^{\frac{-(-1)^k \mu_r z}{L}} \Big|_{ka}^{(k+1)a}$$

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = \frac{L}{\mu_r} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k e^{\frac{-\mu_r}{L} \sum_{n=k+1}^N (-1)^n 2na} e^{\frac{-(-1)^k \mu_r a}{L}} \left[1 - e^{\frac{-(-1)^k \mu_r a}{L}} \right]$$

Expandiendo la exponencial,

$$e^{\frac{-\mu_r}{L} \sum_{n=k+1}^N (-1)^n 2na} = e^{\frac{\mu_r}{L} \left\{ \frac{1}{2} a ((-1)^k + (-1)^{1+N+2} (-1)^k k - 2(-1)^N N \right\}}$$

La expresión cambia a:

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = \frac{L}{\mu_r} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k e^{\frac{\mu_r}{L} \left\{ \frac{1}{2} a ((-1)^k + (-1)^{1+N+2} (-1)^k k - 2(-1)^N N \right\}} e^{\frac{-(-1)^k \mu_r ka}{L}} \left[1 - e^{\frac{-(-1)^k \mu_r a}{L}} \right]$$

Simplificando términos,

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = \frac{L}{\mu_r} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k e^{\frac{\mu_r}{L} \left\{ \frac{a}{2} (-1)^k - \frac{a}{2} (-1)^N - a (-1)^N N \right\}} \left[1 - e^{\frac{-(-1)^k \mu_r a}{L}} \right]$$

Teniendo en cuenta que: $2 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) = e^{\frac{x}{2}}(1 - e^{-x})$

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = 2 \frac{L}{\mu_r} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k e^{\frac{-a(-1)^N \mu_r (1+2N)}{L}} \sinh\left(\frac{(-1)^k \mu_r a}{2L}\right)$$

Pero

$$\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \sinh\left(\frac{(-1)^k \mu_r a}{2L}\right) = N \sinh\left(\frac{\mu_r a}{2L}\right)$$

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = 2 \frac{L}{\mu_r} \text{Ne}^{\frac{-(-1)^N(1+2N)\mu_r a}{2L}} \sinh\left(\frac{a\mu_r}{2L}\right)$$

Recordando que $L = L (-1)^N$, $L^{-1} = L^{-1} (-1)^N$

$$\int_0^{Na} e^{f(z)} dz = 2 \frac{L}{\mu_r} \text{Ne}^{\frac{-(1+2N)\mu_r a}{2L}} \sinh\left(\frac{a\mu_r}{2L}\right) \quad (\text{D7})$$

Resueltas las integrales de (D3), se tiene que:

$$\int_0^{\infty} e^{f(z)} dz = \frac{L}{\mu_r} e^{\frac{-N\mu_r a}{L}} + 2 \frac{L}{\mu_r} \text{Ne}^{\frac{-(1+2N)\mu_r a}{2L}} \sinh\left(\frac{a\mu_r}{2L}\right) \quad (\text{D8})$$

Reemplazando (D8) en (D1) se obtiene la constante de normalización para este caso:

$$C^{-1} = \left(\frac{L}{\mu_r} e^{\frac{-\mu_r Na}{L}} + 2 \frac{L}{\mu_r} \text{Ne}^{\frac{-\mu_r(1+2N)a}{2L}} \sinh\left(\frac{\mu_r a}{2L}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{D9})$$

Apéndice E: Materiales superparamagneticos y ferromagnéticos

- **Ferromagnetismo**

Un material se clasifica o declara como un material ferromagnético [58] si los momentos magnéticos de los átomos se alinean en paralelo por debajo de la temperatura de Curie. Este efecto se debe al hecho de que hay una interacción entre los átomos en estos materiales, provocando que la energía total del material se reduzca en un orden en comparación con una configuración desordenada. Esta tendencia de los imanes elementales a alinearse en paralelo resulta en la magnetización espontánea de áreas más grandes, las áreas blancas en las cuales los imanes elementales están alineados en su mayoría en paralelo. Esto distingue ferromagnetos de paramagnetos, donde los momentos magnéticos son generalmente desordenados. Cuando un material ferromagnético se expone a un campo

magnético externo, las áreas blancas magnetizadas opuestas al campo magnético externo se contraen y, finalmente se voltean; este resultado es una magnetización macroscópica cuyo campo se superpone con el externo para que las líneas de campo aparezcan organizadas lateralmente en el material. En un campo no-homogéneo, el material magnetizado se lleva a lugares de mayor intensidad de campo. Los parámetros se comportan de manera similar, pero la alineación de los momentos magnéticos tiene lugar exclusivamente debido al campo externo y no adicionalmente por la influencia paralelizadora de los momentos vecinos; por tanto, el efecto es mucho más débil.

Los materiales ferromagnéticos tienden a mantener su orden magnético contra influencias externas, es decir, tienden a conservar el orden magnético generado en el interior, incluso cuando ya no están expuestos a un campo magnético. Esta tendencia se llama remanencia del ferromagnetismo, y es causado por efectos de dos órdenes diferentes de magnitud:

Microscópico: el orden magnético rectificado de los imanes elementales (pongamos por caso, los espines de los electrones) en orden atómico.

Macroscópico: la disposición de los distritos de Weiss (denominados “dominios”) en el orden de micrómetros a nanómetros.

Los materiales ferromagnéticos se magnetizan en un campo magnético externo, de modo que la densidad de flujo magnético aumenta en su interior en comparación con el espacio externo y, por tanto, se ordenan en dirección de las intensidades de campo más altas; el factor de aumento de la densidad de flujo en comparación con el espacio vacío se debe a la permeabilidad magnética (o la susceptibilidad magnética) del material, en ferromagnetos resulta muy superior a la unidad $\mu_r \gg 1$.

- **Superparamagnetismo**

Es una forma de magnetismo que aparece en pequeñas nanopartículas ferromagnéticas o ferrimagnéticas [58]. En nanopartículas suficientemente pequeñas, la magnetización

puede cambiar aleatoriamente la dirección bajo la influencia de la temperatura (El tiempo típico entre dos vueltas se llama tiempo de relajación de Néel). En ausencia de un campo magnético externo, cuando el tiempo utilizado para medir la magnetización de las nanopartículas es mucho más largo que el tiempo de relajación de Néel, su magnetización parece estar en un promedio de cero; de este modo se dice que están en estado superparamagnético [57]. En este estado, un campo magnético externo es capaz de magnetizar las nanopartículas, de manera similar a un paramagneto. Sin embargo, la susceptibilidad magnética es mucho mayor que la de los paramagnetos.

Normalmente, cualquier material ferromagnético o ferrimagnético experimenta una transición a un estado paramagnético por encima de su temperatura de Curie. El superparamagnetismo es diferente de esta transición estándar, ya que ocurre por debajo de la temperatura de Curie del material. El superparamagnetismo ocurre en nanopartículas que son de dominio único, es decir están compuestas por un solo dominio magnético; en esta condición, se considera que la magnetización de las nanopartículas es un solo momento magnético gigante, suma de todos los momentos magnéticos individuales transportados por los átomos de la nanopartícula.

Referencias

- [1] G. González, "Relation between Poisson and Schrödinger equations," *American Journal of Physics*, vol. 80, no. 8, pp. 715-719, 2012.
- [2] V. Rokaj, F. k. Diakonov and G. Gabriel, "Comment on and Erratum: "Relation between Poisson and Schrödinger equations"," *American Journal of Physics*, vol. 82, no. 8, pp. 802-803, 2014.
- [3] R. Jackiw and C. Rebbi, "Solitons with fermion number 1/2," *Physical Review D*, vol. 13, no. 12, pp. 3398-3409, 1976.
- [4] P. Arkady, "1900–1962: de Planck a Bohr," in *Niels Bohr and Complementarity: An Introduction*, Nueva York, Springer, 2012, pp. 1-15.
- [5] L. De la Peña, "La mecánica cuántica primitiva," in *Introducción A La Mecánica Cuántica*, 3 ed., Ciudad de México, Fondo de Cultura Económica, 2012, pp. 1-28.
- [6] W. P., "Revisiting Louis de Broglie's famous 1924 paper in the Philosophical Magazine," *Philosophical Magazine Letters*, vol. 86, no. 7, pp. 405-410, 2006.
- [7] A. Cassini and M. L. Levinas, "La explicación de Einstein del efecto fotoeléctrico: un análisis histórico-epistemológico," *Revista latinoamericana de filosofía*, vol. 34, no. 1, pp. 5-38, 2008.
- [8] E. Schrödinger, "An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules," *Physical Review*, vol. 28, no. 6, pp. 1049-170, 1926.
- [9] E. P. Wolfgang, "Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons," *Zeitschrift für Physik-Springer*, vol. 43, no. 9, pp. 601-623, 1927.
- [10] M. Born, "Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge," *Zeitschrift für Physik-Springer*, vol. 37, no. 12, pp. 863-867, 1926.
- [11] W. K. Heisenberg, "Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen," *Zeitschrift für Physik- Springer*, vol. 33, no. 1, pp. 879-893, 1925.
- [12] M. Born and E. P. Jordan, "Zur Quantenmechanik," *Zeitschrift für Physik-Springer*, vol. 34, no. 1, pp. 858-888, 1925.
- [13] M. Born, W. K. Heisenberg and E. P. Jordan, "Zur Quantenmechanik. II.," *Zeitschrift für Physik-Springer*, vol. 35, no. 8, pp. 557-615, 1926.
- [14] P. A. Dirac, "A new notation for quantum mechanics," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 35, no. 3, pp. 416-418, 1939.
- [15] P. A. Dirac, "The quantum theory of the electron," *The Royal Society*, vol. 117, no. 778, pp. 610-624, 1928.
- [16] P. Ehrenfest, "Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik," *Zeitschrift für Physik-Springer*, vol. 45, no. 7, pp. 455-457, 1927.

- [17] H. Mavromatis, "Heisenberg Representation," in *Exercises in Quantum Mechanics*, vol. 6, Dordrecht, Springer, 1992, pp. 102-110.
- [18] R. Phillips Fynman, *Electrodinámica cuántica : la extraña teoría de la luz y la materia*, 3 ed., Madrid: Alianza, 2004.
- [19] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, "Canonical Transformations," in *Classical Mechanics*, 3 ed., New York, Addison Wesley, 2001, pp. 638-430.
- [20] G. González, "Erratum: "Relation between Poisson and Schrödinger equations"," *American Journal of Physics*, vol. 80, no. 12, pp. 1110-1111, 2012.
- [21] C. Aslangul, " δ well with a reflecting barrier," *American Association of Physics*, vol. 63, no. 10, pp. 935-940, 1995.
- [22] D. J. Griffiths and N. F. Taussig, "Scattering from a locally periodic potential," *American Association of Physics*, vol. 60, no. 10, pp. 883-888, 1992.
- [23] B. Gönül, Ü. L. Ünsal and B. Gönül, "An Exactly Solvable Algebraic Model for Single Quantum Well Treatments," *Applied Mathematics*, vol. 4, no. 10, pp. 7-13, 2013.
- [24] R. Aldana, J. Vidal Alcalá and G. González, "The random walk of an electrostatic field using parallel infinite charged planes," *Revista mexicana de física*, vol. 61, no. 3, pp. 154-159, 2015.
- [25] G. González, "Dirac Equation and Optical Wave Propagation in One Dimension," *Physica Status Solidi-Rapid Research Letters*, vol. 12, no. 2, p. 1700357, 2017.
- [26] G. González, "Exact Partition Function for the Random Walk of an Electrostatic Field," *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2017, no. 6970870, pp. 1-5, 2017.
- [27] H. C. Ohanian, "What is Spin?," *American Journal of Physics*, vol. 54, no. 6, pp. 500-505, 1986.
- [28] M.-A. Miri, M. Heinrich, R. El-Ganainy and D. N. Christodoulides, "Supersymmetric Optical Structures," *Physical Review Letters*, vol. 110, no. 23, p. 233902, 2013.
- [29] W. Tan, Y. Sun, H. Chen and S.-Q. Shen, "Photonic simulation of topological excitations in metamaterials," *Scientific Reports*, vol. 4, no. 3842, pp. 1-7, 2014.
- [30] L. Lamata, J. León and E. Solano, "Dirac Equation and Quantum Relativistic Effects in a Single Trapped Ion," *Physical Review Letters*, vol. 98, no. 25, p. 253005, 2007.
- [31] S. Longhi, "Classical simulation of relativistic quantum mechanics in periodic optical structures," *Applied Physics B*, vol. 104, no. 3, pp. 453-468, 2011.
- [32] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos and A. A. Firsov, "Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene," *Nature*, vol. 438, no. 7065, pp. 197-200, 2005.
- [33] M. Z. Hasan and C. L. Kane, "Colloquium: Topological insulators," *Reviews of Modern Physics*, vol. 82, no. 4, pp. 3045-3067, 2010.

- [34] X.-L. Qi and S.-c. Zhang, "Topological insulators and superconductors," *Reviews of Modern Physics*, vol. 83, no. 4, pp. 1057-1110, 2011.
- [35] I. J. Aitchison and A. J. Hey, "Relativistic Quantum Mechanics," in *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction*, New York, CRC Press, 2012, pp. 63-83.
- [36] S. N., H. B. and G.-G. D., "Evidence for Klein Tunneling in Graphene," *Physical Review Letters*, vol. 102, no. 026807, pp. 1-4, 2009.
- [37] K. M.I., "Zitterbewegung, chirality, and minimal conductivity in graphene," *The European Physical Journal B*, vol. 51, no. 2, pp. 157-160, 2006.
- [38] R. Rajaraman and J. S. Bell, "On solitons with half integral charge," *Physics Letters B*, vol. 116, no. 3, pp. 151-154, 1982.
- [39] F. Charmchi and S. S. Gousheh, "Massive Jackiw–Rebbi model," *Nuclear Physics B*, vol. 883, no. 3213, pp. 256-266, 2014.
- [40] A. Amado and A. Mohammadi, "Coupled fermion–kink system in Jackiw–Rebbi model," *The European Physical Journal C*, vol. 77, no. 7, pp. 465-475, 2017.
- [41] D. Bazeia and A. Mohammadi, "Fermionic bound states in distinct kinklike backgrounds," *The European Physical Journal C*, vol. 77, no. 1434, pp. 203-211, 2017.
- [42] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, 3 ed., Nueva Jersey: Wiley, 1999.
- [43] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4 ed., New York: Cambridge University Press, 2017.
- [44] A. Sepulveda Soto, *Electromagnetismo*, Antioquia: Universidad de Antioquia, 2009.
- [45] . F. Richard, *Maxwell's Equations and the Principles of Electromagnetism*, New Delhi: Infinity Science Press, 2008.
- [46] D. McMahon, *Quantum Mechanics Demystified*, New York: McGraw-Hill Education, 2013.
- [47] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, 2 ed., New York: Cambridge University Press, 2016.
- [48] N. Zettili, *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*, 2 ed., New Jersey: Wiley, 2009.
- [49] W. P. Su, J. R. Schrieffer and A. J. Heeger, "Soliton excitations in polyacetylene," *Physical Review B*, vol. 22, no. 4, pp. 2099-2111, 1983.
- [50] A. Rabinovitch, "Negative energy states of an ‘‘inverted’’ delta potential: Influence of boundary conditions," *American Journal of Physics*, vol. 53, no. 8, pp. 768-773, 1985.
- [51] J. Yang and V. Zelevinsky, "Short-range repulsion and symmetry of two-body wave functions," *American Journal of Physics*, vol. 66, no. 3, pp. 247-251, 1998.
- [52] H. Sadri, *Mathematical Methods: For Students of Physics and Related Fields*, 2 ed., New York: Springer, 2008.

- [53] M. N. Sadiku, *Elementos de Electromagnetismo*, 3 ed., Ciudad de México: Oxford University Press México, S.A. de C.V., 2003.
- [54] I. E. Irodov, *Basic laws of electromagnetism*, 1 ed., New Delhi: CBS Publishers & Distributors, 1994.
- [55] A. Lenard, "Exact Statistical Mechanics of a One-Dimensional System with Coulomb Forces," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 2, no. 5, pp. 682-693, 1961.
- [56] F. C. Brown, "Propiedades dieléctricas y ópticas de los cristales iónicos," in *Física de los Sólidos*, Barcelona, Reverté, 1970, pp. 245-287.
- [57] C. Heck, *Magnetic Materials and their Applications*, London: Butterworth-Heinemann, 1974.
- [58] E. C. Snelling, *Soft ferrites: properties and applications*, London: Iliffe, 1969.